महाराष्ट्र राज्य तंत्र शिक्षण मंडळ, मुंबई

(स्वायत) (ISO 9001:2015) (ISO/IEC 27001:2013)

अभियांत्रिकी आणि तंत्रज्ञान पदविका

शिक्षण पुस्तिका

(Learning Material)

मूलभूत गणित

Basic Mathematics

(311302)

मराठी – इंग्रजी (द्विभाषिक) माध्यम

(अभियांत्रिकी व तंत्रज्ञान प्रथम सत्र पदविका)

शिक्षण पुस्तिका

[Learning Material]

मूलभूत गणित

[Basic Mathematics]

311302

(K-Scheme)

मराठी –इंग्रजी [द्विभाषिक] माध्यम

[अभियांत्रिकी व तंत्रज्ञान प्रथम सत्र]

महाराष्ट्र राज्य तंत्र शिक्षण मंडळ, मुंबई

स्वायत्त [ISO 9001:2015] [ISO/IEC 27001:2013]

महाराष्ट्र राज्य तंत्र शिक्षण मंडळ

(**स्वायत्त**) (ISO: ९००१:२०१५) (ISO/IES: २७००१-२०१३)

शासकीय तंत्रनिकेतन इमारत, चौथा मजला, ४९, खेरवाडी, बांद्रा (पूर्व), मुंबई - ४०० ०५१.

दूरध्वनी क्र.: ०२२-६२५४२१७० / १६१

Email : director@msbte.com Web : www.msbte.org.in

प्रास्ताविक

महाराष्ट्र राज्यातील पदविका स्तरावरील तंत्रशिक्षणामध्ये विद्यार्थ्यांचे रोजगार कौशल्य विकसित करून विद्यार्थ्यांचा सर्वांगीण विकास घडवून आणण्याकरिता महाराष्ट्र राज्य तंत्रशिक्षण मंडळ कटिबद्ध आहे. उद्योगधंद्यातील बदलत्या तंत्रज्ञानाशी संबंधित गरजा लक्षात घेऊन महाराष्ट्र राज्य तंत्र शिक्षण मंडळाकडून पदविका अभ्यासक्रम वेळोवेळी अद्यावत करण्यात येतो . अभियांत्रिकी पदविका अभ्यासक्रम शिकत असतांना संकल्पनात्मक ज्ञान, सुसंगत संदर्भ, प्रश्न विचारणे, विश्वसनिय पुरावे, कारणमीमांसा आणि सुस्पष्ट निकष यांचा वापर करून अर्थाची उकल करण्याची, विश्लेषण व मूल्यमापन करण्याची तसेच तर्काने अनुमान काढण्याची क्षमता म्हणजेच चिकित्सक विचार विद्यार्थ्यांमध्ये अधिक दृढ होतील असा मला विश्वास आहे. जेव्हा विद्यार्थी ज्ञान मिळवण्याच्या माध्यमाशी पूर्णपणे परिचित आणि सोयीस्कर असतात, तेव्हा त्यांच्यासाठी वर्गातील चर्चेत भाग घेणे सोपे होते, संकल्पनात्मक व सैद्धांतिक बाबींचे आकलन परिपूर्ण होते, संज्ञानात्मक क्षमता सुधारते आणि त्यांचा आत्मविश्वास देखील वाढतो या सर्व गोष्टींचा विचार करून मंडळाकडून शैक्षणिक सामुग्रीची निर्मिती करण्यात आलेली आहे . भारत देश हा खेड्यापाड्यातून विकसित झालेला देश असून ग्रामीण भागातील विद्यार्थ्यांना तांत्रिक शिक्षण घेतांना भाषेचा अडसर न येता तांत्रिक बाबींचा आशय समजून घेणे शक्य होईल या दृष्टिकोनातून महाराष्ट्र राज्य तंत्र शिक्षण मंडळाने पदविका स्तरावरील तांत्रिक शिक्षणाकरीता विद्यार्थ्यांना मराठी-इंग्रजी द्विभाषिक माध्यमाचा पर्याय शैक्षणिक वर्ष २०२१-२२ पासून उपलब्ध करून दिलेला आहे .

राष्ट्रीय शैक्षणिक धोरण-२०२० प्रादेशिक भाषेतील शिक्षणास प्रोत्साहन देते, ज्यामुळे विद्यार्थ्यांना तांत्रिक अभ्यासक्रमांसाठी प्रादेशिक भाषांतुन शिक्षणाचे माध्यम निवडता येते. सदर धोरणामुळे प्रादेशिक भाषांमध्ये तांत्रिक सामग्री आणि अभ्यास सामग्रीचा विकास आणि भाषांतर निर्माण करण्याची आवश्यकता आहे . त्यास अनुसरून मंडळाने मराठी-इंग्रजी द्विभाषिक माध्यमाचा पर्याय द्वितीय व तृतीय वर्षाकरिताही उपलब्ध करून देण्यात आला आहे. तसेच त्याकरिताची शैक्षणिक सामग्रीही संबंधीत भागधारकरांना उपलब्ध करून देण्यात येत आहे.

पदविका स्तरावरील तंत्रशिक्षण अधिक दर्जेदार करण्यासाठी महाराष्ट्रातील अनुभवी व तज्ञ अध्यापकांनी व्यवहारिक मराठी भाषा व इंग्रजी भाषेतील तांत्रिक शब्दावली यांचा वापर करून मराठी - इंग्रजी भाषेचा सुवर्णमध्य साधण्याचा प्रयत्न केलेला आहे. मंडळाच्या स्तरावर गठीत सुकाणू समितीमार्फत सदर शैक्षणिक सामुग्रीचा दर्जा, तसेच इतर बाबींची तपासणी करण्यात आलेली आहे. त्यामुळे सदर शैक्षणिक सामुग्री अधिक सम्पन्न झालेली असून विद्यार्थी त्यांच्या व्यक्तिमत्त्वाचा सुसंवादी आणि सर्वांगीण विकास साधतील. परिणामतः विश्वस्तरीय मनुष्यबळाच्या गरजा पूर्ण करण्यात महाराष्ट्र राज्य अग्रेसर राहील व पर्यायाने राष्ट्रनिर्मिती करीता निश्चितच हातभार लागेल , असा मला विश्वास आहे.

अभियांत्रिकी पदविका अभ्यासक्रमातील प्रमुख विषयांची मराठी-इंग्रजी द्विभाषिक शैक्षणिक सामुग्री बनविण्यासाठी अध्यापक व सुकाणू समितीचे सदस्य यांनी दर्शविलेले समर्पण व वचनबद्धता कौतुकास पात्र आहे , या सर्वांचे मी मनः पूवक अभिनंदन करतो !

(प्रमोद नाईक)
संचालक
म. रा. तंत्र शिक्षण मंडळ, मुंबई.

मार्गदर्शक

श्री. सचिन बापूराव येडे
अधिव्याख्याता गणित

लेखक

श्री. प्रशांत कारभारी अहिरे
अधिव्याख्याता गणित

श्री. विकास निंबा बच्छाव
अधिव्याख्याता गणित

श्री. ज्ञानेश्वर वामन चव्हाण
अधिव्याख्याता गणित

समन्वयक

डॉ. स्वप्निलकुमार शामराव पाटील
विभागप्रमुख

मुख्य समन्वयक

प्रा. श्रीहरी रविंद्र उपासनी
प्राचार्य

प्रकल्प संस्था

गुरु गोबिंद सिंग तंत्रनिकेतन, नाशिक (०३६९)

अनुक्रमणिका

घटक- १ बीजगणित (Unit - I Algebra) अल्जेब्रा

- **विषय निष्पत्ती: (Course Outcome):**

CO1 - अभियांत्रिकी (विद्याशाखा) संबंधित समस्या सोडवण्यासाठी बीजगणिताच्या संकल्पना लागू करणे.

- **सिद्धांत शिक्षण परिणाम** (TLO's) CO's **च्या संरेखित.**

  [Theory Learning Outcomes (TLO's) aligned to CO's.]:

TLO 1.1 लॉगरिथमच्या नियमांवर आधारित दिलेल्या सोप्या समस्येवर निराकरण करणे.

TLO 1.2 सारणी व्यस्त पद्धत वापरून दिलेली रेखीय समीकरणांची प्रणाली सोडविणे.

TLO 1.3 दिलेल्या सोप्या तर्कशुद्ध कार्यासाठी योग्य आणि अयोग्य आंशिक अपूर्णांक मिळविणे.

TLO 1.4 प्राचीन भारतीय गणिता मध्ये दिलेली संकल्पना वापरून एकसामयिक समीकरणे सोडविणे.

परिचयः बीजगणित ही गणिताची एक सोपी भाषा आहे. वास्तविक जगाच्या परिस्थितीचे गणिती साचे (models) तयार करण्यासाठी आणि समस्या हाताळण्यासाठी वापरले जाते. अभियांत्रिकी व तंत्रज्ञानाची बीजगणित गरज म्हणजे बीजगणित वापरून अभियांत्रिकी मधील साध्या समस्या सोडवणे. लॉगॅरिथम, सारणी आणि आंशिक भागांचा समावेश बीजगणितात करण्यात आलेला आहे.

A - लॉगरिथम (Logarithm):

लॉगेरिथमचे महत्त्व : अभियांत्रिकी समस्या सुलभ करण्यासाठी लॉगेरिथम हे एक उत्तम साधन आहे

लॉगेरिथम अंतर्गत समाविष्ट बाबी (Content of Logarithms):

व्याख्या (Definition):

जर $a^x = y$, $a > 0,\ a \neq 1,$, $a \in$ R तर x बरोबर y चे लॉगेरिथम तळाशी (base) a असे म्हणतात आणि त्याला $x = \log_a y$ असे लिहिले जाते.

उदाहरणार्थ :

1) जर $2^3 = 8$ तर $3 = \log_2 8$

2) जर $6^3 = 216$ तर $3 = log_6 216$

3) जर $(7)^{-2} = \frac{1}{49}$ तर $-2 = log_7 \left(\frac{1}{49}\right)$

टीप:

i) $a^x = y$ याला घातांकीय स्वरूप म्हणतात आणि
$x = \log_a y$ याला लॉगेरिथम स्वरूप म्हणतात

ii) ऋण संख्या आणि शून्य यांचे लॉगेरिथम परिभाषित केले जात नाहीत.

लॉगरिथमचे नियम (LAWS OF LOGARITHM):

1. $\log_a(m \times n) = \log_a m + \log_a n$
2. $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = log_a m - log_a n$
3. $\log_a(m)^n = n \log_a m$
4. $\log_n m = \frac{\log_a m}{\log_a n}$
5. $log_n m = \frac{1}{log_m n}$
6. $\log_a\left(\frac{1}{m}\right) = -\log_a m$

टीप:

1. $log_a 1 = 0 \quad \therefore \; a^0 = 1$
2. $log_a a = 1 \quad \therefore \; a^1 = a$
3. $a^{\log_a x} = x$

सोडवलेली उदाहरणे

1) खालील प्रश्नांच्या किमती काढा. (Find the value of the following):

a. $\mathbf{\log_2 8}$

उत्तर:

$\log_2 8 = x$

$\therefore \; 2^x = 8$

$\therefore \; 2^x = 2^3$

$\therefore \; x = 3$

$\therefore \; \log_2 8 = 3$

b. $\boldsymbol{log_3 81}$

उत्तर:

$log_3 81$

$= log_3 3^4$

$= 4\, log_3 3$

$= 4 \times 1 = 4$

c. $\boldsymbol{log_3 243}$

उत्तर:

$log_3 243$

$= log_3 3^5$

$= 5\, log_3 3$

$= 5 \times 1 = 5$

d. $\boldsymbol{log_{81} 3}$

उत्तर:

$log_{81} 3$

$= \frac{log\, 3}{log\, 81}$

$= \frac{log\, 3}{log\, 3^4} = \frac{log\, 3}{4\; log\, 3} = \frac{1}{4}$

2) खालील गोष्टी सुलभ करा (Simplify the following):

a) $\boldsymbol{log_2 14 - log_2 7}$

उत्तर:
$$log_2 14 - log_2 7$$
$$= log_2\left(\frac{14}{7}\right) = log_2(2) = 1$$

b) $\boldsymbol{log_3 4 \times log_4 81}$

उत्तर:
$$log_3 4 \times log_4 81$$
$$= \frac{log\,4}{log\,3} \times \frac{log\,81}{log\,4} = \frac{log\,81}{log\,3} = \frac{log\,3^4}{log\,3} = \frac{4\ log\,3}{log\,3} = 4 \times 1 = 4$$

c) $\boldsymbol{log\left(\frac{2}{3}\right) + log\left(\frac{4}{5}\right) - log\left(\frac{8}{15}\right)}$

उत्तर:
$$log\left(\frac{2}{3}\right) + log\left(\frac{4}{5}\right) - log\left(\frac{8}{15}\right)$$
$$= log\left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}\right) - log\left(\frac{8}{15}\right) = log\left(\frac{8}{15}\right) - log\left(\frac{8}{15}\right) = 0$$

3) खालील समीकरणावरून x ची किंमत काढा जर

i) $\boldsymbol{log_3 27 = x}$

उत्तरः $log_3 27 = x$

$\therefore \quad 3^x = 27$
$\therefore \quad 3^x = 3^3$
$\therefore \quad x = 3$

ii) $\boldsymbol{log_3(x + 6) = 2}$

उत्तरः $log_3(x + 6) = 2$

$\therefore \quad 3^2 = x + 6$
$\therefore \quad x = 9 - 6$
$\therefore \quad x = 3$

सराव प्रश्नसंच

1) खालील प्रश्नांच्या किमती काढा.

1. $log_2 8$ **2**. $log_3 81$ **3**. $25^{log_5 8}$ **4**. $log_{81} 3$ **5**. $log_4 0.25$

6. $log_2 16$ **7**. $log_5 125$ **8**. $log_3 243$ **9**. $log_{10} 1000$ **10**. $log_{10} \sqrt[3]{1000}$

2) खालील गोष्टी सुलभ करा :

1. $log\left(\frac{25}{77}\right)+log\left(\frac{121}{35}\right)-log\left(\frac{49}{55}\right)$
2. $log(5)+log(3)-log(2)$
3. $2\cdot log\left(\frac{16}{15}\right)+log\left(\frac{25}{24}\right)-log\left(\frac{32}{27}\right)$
4. $\frac{1}{log_2 8}+\frac{1}{log_4 8}$
5. $log\left(\frac{145}{49}\right)+log\left(\frac{14}{29}\right)-log\left(\frac{10}{7}\right)$
6. $log\left(\frac{15}{16}\right)+log\left(\frac{64}{81}\right)-log\left(\frac{4}{27}\right)-log\,5$

3) खालील समीकरणावरून x ची किंमत काढा जर

1. $log_2(x-3)=3$
2. $log_3(x+5)=4$
3. $log_3(x+5)=4$
4. $log_5(x^2-5x+11)=1$
5. $log_2[log_3(log_2 x)]=1$
6. $\frac{log\,x}{log\,4}=\frac{log\,64}{log\,16}$
7. $log_4(x-2)=2$
8. $log_3(x+4)=4$

4) सिद्ध करा

1. $log\left(\frac{a-b}{b-c}\right)+log\left(\frac{b-c}{c-a}\right)+log\left(\frac{c-a}{a-b}\right)=0$
2. $\frac{1}{\log_a abc}+\frac{1}{\log_b abc}+\frac{1}{\log_c abc}=1$
3. $\frac{1}{\log_a bc+1}+\frac{1}{\log_b ac+1}+\frac{1}{\log_c bc+1}=1$

B - सारण्या (मॅट्रीक्स - Matrices)

सारण्याचे महत्व (मॅट्रिक्सचे महत्त्व - Significance of Matrices):

एकाच वेळी रेखीय समीकरणांची (linear equations) प्रणाली म्हणून ओळखल्या जाणाऱ्या एकाधिक रेषीय समीकरणासह संक्षिप्त लिहिण्यासाठी आणि कार्य करण्यासाठी सारणीचा (Matrix) वापर केला जाऊ शकतो.

व्याख्या (Definition):-

चौरस कंसांच्या (square brackets) जोडी दरम्यान संलग्न m पंक्ती आणि n स्तंभांच्या आयताकृती स्वरूपात (rectangular form) तयार केलेल्या m x n (m बाय n म्हणून वाचा) संख्यांच्या संचास m x n ऑर्डरचा एक सारणी म्हणतात.

सारणी सामान्यतः कॅपिटल अक्षरांद्वारे दर्शविली जातात आणि त्यातील घटक लहान अक्षरांद्वारे दर्शवितात.

उदाहरणार्थ (For e.g.) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3}$; $B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$

थोडक्यात $A = [a_{ij}]_{m\times n}$

जेव्हा $i =$ No. of rows 1,2,3, ..m आणि $j =$ No. of columns 1,2,3,....., n.

सारणीची कोटिका (मॅट्रिक्सची ऑर्डर - Order of a matrix):-

सारणीची कोटिका (order of a matrix) m x n म्हणून परिभाषित केली आहे ज्यामध्ये m पंक्ती आणि n स्तंभ आहेत.

उदाहरणे :

1. $A = [2 \quad -3 \quad 1]$ सारणी A ची कोटिका 1× 3 आहे (Order of matrix A is 1 × 3)

2. $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ सारणी B ची कोटिका 3× 2 आहे (Order of matrix B is 3 × 2)

3. $C = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 0 & 9 & 2 \end{bmatrix}$ सारणी C ची कोटिका 2× 3 आहे (Order of matrix C is 2 × 3)

4. $D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ सारणी D ची कोटिका 2× 1 आहे (Order of matrix D is 2 × 1)

सारणीचे प्रकार (Types of matrices):-

1) **पंक्ति सारणी (रो मॅट्रिक्स - Row matrix) :** फक्त एक पंक्ती असलेल्या सारणीला पंक्तिसारणी म्हणतात.

उदाहरणार्थ: (For e.g.) : $A = [2 \quad -3 \quad 1]_{1\times 3}$

2) **स्तंभ सारणी (कॉलम मॅट्रिक्स - Column matrix):** फक्त एक स्तंभ असलेल्या सारणीला स्तंभ सारणी म्हणतात.

उदाहरणार्थ: (For e.g.) : $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}_{3\times 1}$

3) **चौरस सारणी (स्क्वेअर मॅट्रिक्स - Square matrix):** पंक्ती आणि स्तंभांची समान संख्या असलेल्या सारणीला चौरस सारणी म्हणतात.

उदाहरणार्थ: (For e.g.) : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

नोंदः सारणी A मध्ये घटक 1, 5, 9 कर्ण घटक (diagonal elements) आहेत आणि उर्वरित कर्णघटक नाहीत (non-diagonal elements).

4) **कर्णसारणी (डायगोनल मॅट्रिक्स - Diagonal matrix):** चौरस सारणीमध्ये कर्ण घटक (diagonal elements) सोडून उर्वरित सगळे घटक शून्य असतात त्याला कर्णसारणी म्हणतात

उदाहरणार्थ: (For e.g.) : $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

5) **अदिश सारणी (स्केलर मॅट्रिक्स - Scalar matrix):** कर्णसारणी (diagonal matrix) जिथे सर्व कर्ण घटक समान असतात त्याला अदिश सारणी म्हणतात.

उदाहरणार्थ: (For e.g.) : $K = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

6) **अविकारक सारणी (आयडेंटिटी मॅट्रिक्स - Identity matrix) किंवा एककी सारणी (Unit matrix):** एक अदिश सारणी जिथे सर्व कर्ण घटक (diagonal elements) एक असतात त्याला अविकारक सारणी किंवा एककी सारणी असे म्हणतात. आणि त्याला **I** ने दर्शवितात.

उदाहरणार्थ: (For e.g.) : $\mathrm{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$; $\mathrm{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

7) **शून्य सारणी (झिरो मॅट्रिक्स - Zero matrix) :** ज्या सारणीतील सर्व घटक शून्य (zero) असतात त्याला शून्य सारणी असे म्हणतात

उदाहरणार्थ: (For e.g.) : $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

सारणींचे बीजगणित (मॅट्रिक्सचे अलजेब्रा - Algebra of matrices):

1) **सारणींची बेरीज (मॅट्रिक्सची ऍडिशन - Addition of matrices):** जर दोन सारणी समान कोटिकेचे असतील तर संबंधित घटक जोडून A+B मिळू शकेल. A+B सारणीची कोटिका (order) हि A आणि B सारणीच्या कोटिके प्रमाणेच आहे.

उदाहरणार्थ जर $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}_{2\times2}$ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2}$

तर $A + B = \begin{bmatrix} 2+3 & 1+2 \\ 3+1 & 5+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}_{2\times2}$

2) **सारणींची वजाबाकी (मॅट्रिक्सची सब्स्ट्रॅक्शन - Subtraction of matrices):** जर दोन सारणी समान कोटिकेचे असतील तर संबंधित घटक वजा करून A − B मिळवता येते. A − B सारणीची कोटिका हि A आणि B सारणीच्या कोटिके प्रमाणेच आहे.

उदाहरणार्थ: जर $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}_{2\times2}$ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2}$

तर $A - B = \begin{bmatrix} 2-3 & 1-2 \\ 3-1 & 5-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}$

3) **अदिश गुणाकार (स्केलर मल्टिप्लिकेशन - Scalar Multiplication) :** जर A एक सारणी असेल आणि 'K' एक अदिश असेल तर सारणी 'KA' सारणी A च्या प्रत्येक घटकाला 'K' ने गुणाकार करून मिळविला जातो.

उदाहरणार्थ: जर $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}_{2\times2}$ आणि $\mathrm{K} = 5$ तर $5A = 5\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 15 & 25 \end{bmatrix}_{2\times2}$

सोडवलेली उदाहरणे

1) जर $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}}$ तर $\boldsymbol{A - 3B}$ ची किंमत शोधा

उत्तर: $A - 3B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 6-0 & 3-(-3) \\ 2-9 & 1-(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -7 & 7 \end{bmatrix}$$

2) जर $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}}$ $\boldsymbol{and\ 2A + 3B = 0}$, तर $\boldsymbol{B}$ ची किंमत शोधा

उत्तर: दिलेले, $2A + 3B = 0$

$\therefore 3B = -2A$

$\therefore 3B = -2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

$\therefore 3B = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$

$\therefore B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$

3) जर $2\left\{X + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, तर X ची किंमत शोधा

उत्तरः दिलेले, $2X + \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 8 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore 2X = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 8 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore 2X = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -5 \\ -7 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -5 & 2 & -5 \\ -7 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

4) खालील समीकरणावरून x आणि y च्या किंमती शोधा.

$$2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \end{bmatrix}$$

उत्तरः दिलेले, $2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \end{bmatrix}$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\therefore 2x = 10, \quad 2y = -8$$

$$\therefore x = 5, \quad y = -4$$

5) खालील समीकरणावरून x आणि y च्या किंमती शोधा.

$$\begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ y & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

उत्तरः दिलेले, $\begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ y & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1+3 & x+1 & 0+2 \\ y+4 & 2+3 & 4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 4 & x+1 & 2 \\ y+4 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x + 1 = 2, \quad y + 4 = 6$$

$$\therefore x = 2 - 1, \quad y = 6 - 4$$

$$\therefore x = 1, \quad y = 2$$

6) दिलेले, $\boldsymbol{A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 5\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 0\end{bmatrix}}$ **तर $\boldsymbol{K}$ ची किंमत शोधा**

जर $A+2B+KC=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 13\end{bmatrix}$

उत्तर: दिलेले, $A+2B+KC=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 13\end{bmatrix}$

$$\therefore KC=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 13\end{bmatrix}-A-2B$$

$$\therefore K\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 13\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 5\end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix}2K & 3K\\ 4K & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 13\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 2\\ 4 & 10\end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix}2K & 3K\\ 4K & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -3\\ -4 & 0\end{bmatrix}$$

$$\therefore 2K=-2$$

$$\therefore K=\frac{-2}{2}$$

$$\therefore K=-1$$

सराव प्रश्नसंच

1) जर $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 1 & 9\end{bmatrix}$ तर $2A+3B$ शोधा

2) जर $A=\begin{bmatrix}6 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}$ तर $3A-2B$ शोधा

3) जर $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-3 & 4 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ तर $3A+4B$ शोधा

4) जर $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 3\end{bmatrix}$ तर $3A-4B$ शोधा

5) जर $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & 1 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ तर $3A-2B$ शोधा

6) जर $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4 & 5\\ 3 & -2\end{bmatrix}$ & $C=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & 6\end{bmatrix}$, तर $3A+4B-2C$ शोधा

7) जर $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 7\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 5\end{bmatrix}$ तर $2A+3B-5I$ शोधा

8) जर $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ -1 & 2 & 0\\ 4 & 0 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$ & $C=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$ तर D ची किंमत शोधा जर $2A-3B-D=C$

9) खालील समीकरणावरून x आणि y च्या किंमती शोधा.

$$\begin{bmatrix} 3x^2 & 4 \\ 1 & y-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 1 & -y+3 \end{bmatrix}$$

10) खालील समीकरणावरून x आणि y च्या किंमती शोधा.

$$3\begin{bmatrix} x & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y+5 & 6 & -15 \\ 9 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

सारणींचे गुणाकार (मॅट्रिक्स मल्टिप्लिकेशन - Matrix Multiplication):

A आणि B या दोन सारणींचा गुणाकार केवळ तेव्हाच शक्य आहे जेव्हा A मधील स्तंभांची संख्या B मधील पंक्तींच्या संख्ये इतकी असेल.

समजा $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ एक $m \times n$ सारणी

$B = [b_{ij}]_{n\times p}$ एक $n \times p$ सारणी

$$A_{m\times n} \times B_{n\times p} = (AB)_{m\times p}$$

$A \times B$ सारणीची कोटिका (Order) $m \times p$ आहे

दोन सारणींच्या गुणाकारांची (Multiplication) पद्धतः

समजा. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times 2}, B = \begin{bmatrix} p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix}_{2\times 3}$

तर $AB = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 & R_1C_3 \\ R_2C_1 & R_2C_2 & R_2C_3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

नोंदः R_1C_1 म्हणजे B च्या पहिल्या स्तंभातील संबंधित घटकांसह A च्या पहिल्या पंक्तींचे घटक गुणाकार करणे.

नोंदः सारणी गुणाकार क्रम निरपेक्ष नाही. म्हणजेच सामान्यतः A × B ≠ B × A ($AB \neq BA$)

नोंदः जर सारणी A च्या स्तंभांची संख्या सारणी B च्या पंक्तींच्या संख्येशी बरोबरी नसेल तर गुणाकार AB अपरिभाषित आहे.

सोडवलेली उदाहरणे

1) जर $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$ तर सारणी $\boldsymbol{AB}$ शोधा

उत्तरः दिलेले, $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$A_{2\times 3} \times B_{3\times 2} = (AB)_{2\times 2}$$

$\therefore$ गुणाकार AB शक्य आहे

$$\therefore\ AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-6+0 & 1+0+12 \\ 8+3+0 & 4+0+4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -4 & 13 \\ 11 & 8 \end{bmatrix}$$

2) जर $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ तर सारणी $A^2 - 7A$ शोधा

उत्तर: दिलेले, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore\ A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+0 & 2+2 \\ 0+0 & 0+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A^2 - 7A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - 7A = \begin{bmatrix} -10 & -3 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$$

3) जर $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ तर सारणी $AB - 3I$ शोधा

उत्तर: दिलेले, $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-6+3 & 3-2+6 \\ -2+6+1 & -3+2+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ AB - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AB - 3I = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

4) जर $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$, तर सारणी सिद्ध करा $A^2 = 0$ किंवा A^2 ही शून्य सारणी आहे.

उत्तर: दिलेले, $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$,

$$\therefore A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-9 & 27-27 \\ -3+3 & -9+9 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \text{ (शून्य सारणी)}$$

5) जर $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, तर $A^2 - 4A$ आदिश सारणी दाखवा.

उत्तर: दिलेले, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\therefore A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+4+4 & 2+2+4 & 2+4+2 \\ 2+2+4 & 4+1+4 & 4+2+2 \\ 2+4+2 & 4+2+2 & 4+4+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^2 - 4A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \text{आदिश सारणी}$$

6) दिलेल्या समीकरणावरून x आणि y च्या किमती काढा.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 9 & 4 & 13 \end{bmatrix}$$

उत्तर: दिलेले, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 9 & 4 & 13 \end{bmatrix}$

$$\therefore \begin{bmatrix} x+6 & y-2 & 7 \\ 3x+6 & 3y-2 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 9 & 4 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x+6=7\,, \quad y-2=0$$

$$\therefore \; x=1\,, \qquad y=2$$

7) दिलेल्या समीकरणावरून x आणि y च्या किमती काढा.

$$\left\{4\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

उत्तर: दिलेले, $\left\{4\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$\therefore \left\{\begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 8 & -4 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 4 & -6 & 8 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 4+0-2 \\ 8+0-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\therefore \; x=2\,, \qquad y=4$$

8) जर $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{-5} & \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$ & $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$ तर $\boldsymbol{x}$ आणि $\boldsymbol{y}$ च्या किमती काढा.

उत्तर: दिलेले, $AB = I$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & x \\ y & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} -5+3y & x-3 \\ -10+5y & 2x-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \; x-3=0 \;, \quad -5+3y=1$$

$$\therefore \; x=3 \;, y=2$$

9) दिलेल्या समीकरणावरून x आणि y च्या किमती काढा.

$$\begin{bmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{2}\\\mathbf{2}\end{bmatrix}[\mathbf{1} \quad \mathbf{2}]\begin{bmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\\\boldsymbol{z}\end{bmatrix}$$

उत्तर: दिलेले, $\begin{bmatrix}3\\2\\2\end{bmatrix}[1 \quad 2]\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

$$\therefore \begin{bmatrix}3 & 6\\2 & 4\\2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix}9-6\\6-4\\6-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix}3\\2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

$$\therefore \; x=3 \;, y=2 \,, z=2$$

सराव प्रश्नसंच

1) जर $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\1 & 3 & -4\\5 & -3 & 4\end{bmatrix}$ तर A^2-3I ची किंमत काढा.

2) जर $A=\begin{bmatrix}1 & -5\\6 & 4\end{bmatrix}$ आणि $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$ तर $AB-2I$ ची किंमत काढा.

3) दिलेल्या समीकरणावरून x आणि y च्या किमती काढा.

$$\left\{3\begin{bmatrix}3 & 1\\4 & 0\\3 & -3\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}0 & 2\\-2 & 3\\-5 & 4\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

4) दिलेल्या समीकरणावरून x आणि y च्या किमती काढा.

$$\left\{\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\\2 & 2 & 1\\3 & 1 & 2\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\1 & 4 & 5\\2 & 1 & 0\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

5) जर $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 4\\4 & 2 & 4\\4 & 4 & 2\end{bmatrix}$, तर A^2-8A आदिश सारणी दाखवा.

6) जर $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\4 & -3 & 4\\3 & -3 & 4\end{bmatrix}$, तर $A^2=I$ सिद्ध करा

सारणीचा परिवर्त (मॅट्रिक्सचा ट्रान्स्पोज - Transpose of a matrix):

व्याख्या: सारणी A चे परिवर्त (transpose) हे पंक्ती आणि स्तंभांचे अदला बदल करून मिळते आणि त्यास A' किंवा A^t किंवा A^T ने दर्शविले जाते.

उदाहरणार्थ: जर $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ तर $A'\ or\ A^t or\ A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

गुणधर्म (Properties):

I. $(A')' = A$

II. $(A+B)' = A' + B'$

III. $(AB)' = B'A'$

सममित सारणी (सिमेट्रिक मॅट्रिक्स -Symmetric Matrix):

व्याख्याः सारणी A मध्ये, जर सर्व i आणि j साठी $a_{ij} = a_{ji}$ तर सारणी A ला सममित सारणी म्हणून ओळखले जाते म्हणजे $A = A'$ तर सारणी A सममित सारणी म्हणून ओळखले जाते.

उदाहरणार्थ (For e.g). $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

विषम सममित सारणी (स्क्यू सिमेट्रिक मॅट्रिक्स - Skew Symmetric matrix):

व्याख्या: सारणी A मध्ये, जर सर्व i आणि j साठी $a_{ij} = -a_{ji}$ तर सारणी A ला विषम सममित सारणी म्हणून ओळखले जाते म्हणजे $A = -A'$ तर सारणी A विषम सममित सारणी म्हणून ओळखले जाते.

उदाहरणार्थ (For e.g). $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ -5 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

लंबकोनी सारणी (ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स - ऑर्थोगोनल सारणी)

जर $A \cdot A' = A' \cdot A = I$ तर A ला ऑर्थोगोनल सारणी (लंबकोनी सारणी) म्हणतात.

सोडवलेली उदाहरणे

1. जर $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ आणि $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ तर $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{B}'$ याची पडताळणी करा.

उत्तर: दिलेले, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ आणि $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore\ A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ आणि $B' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore A+B=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & 5 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5 & 3\\ 5 & 8 & 0\end{bmatrix}$$

$$(A+B)'=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 5 & 8\\ 3 & 0\end{bmatrix}\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$A'+B'=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 5\\ -1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\\ 4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 5 & 8\\ 3 & 0\end{bmatrix}\ldots\ldots\ldots(2)$$

$\therefore$ (1)आणि (2) वरून

$$(A+B)'=A'+B'$$

2. जर $\boldsymbol{A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & 5 & 0\end{bmatrix}}$ आणि $\boldsymbol{B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}}$ तर $\boldsymbol{(AB)'=B'A'}$ याची पडताळणी करा.

उत्तर: दिलेले, $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & 5 & 0\end{bmatrix}$ आणि $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$

$$\therefore\ A'=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 0 & 5\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix}\text{ आणि } B'=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ AB=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & 5 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 1 & -3\\ 3 & 2 & 6\\ 14 & 5 & 0\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ (AB)'=\begin{bmatrix}5 & 3 & 14\\ 1 & 2 & 5\\ -3 & 6 & 0\end{bmatrix}\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$B'A'=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 0 & 5\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 3 & 14\\ 1 & 2 & 5\\ -3 & 6 & 0\end{bmatrix}\ldots\ldots\ldots(2)$$

$\therefore$ (1)आणि (2) वरून

$$(AB)'=B'A'$$

सराव प्रश्नसंच

1) जर A = $\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$ आणि $B=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$ तर $(AB)^T$ शोधा

2) जर A = $\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$ आणि $B=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$ तर $(A+B)'=A'+B'$ याची पडताळणी करा.

3) जर $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 5\end{bmatrix}$ आणि $B=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ तर $(AB)^T=B^TA^T$ याची पडताळणी करा.

4) जर $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ आणि $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ तर $(AB)^T = B^T A^T$ याची पडताळणी करा.

5) जर $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ आणि $B = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -5 & 6 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$ तर $(AB)^T = B^T A^T$ याची पडताळणी करा.

6) जर $\mathrm{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ तर सिद्ध करा हि लंबकोनी सारणी (ऑर्थोगोनल सारणी) आहे

अपूर्ण कोटि वर्ग सारणी (सिंग्युलर मॅट्रिक्स - singular matrix):

जर $det(A)$ किंवा $|A| = 0$ असेल तर A ला अपूर्ण कोटि वर्ग सारणी (singular matrix) म्हणतात.

पूर्ण कोटि वर्ग सारणी (नॉन सिंग्युलर मॅट्रिक्स - non-singular matrix):

जर $det(A)$ किंवा $|A| \neq 0$ असेल तर A ला पूर्ण कोटि वर्ग सारणी (non-singular matrix) म्हणतात.

सोडवलेली उदाहरणे

1) जर $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$ आणि $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ तर सारणी, AB पूर्ण कोटि वर्ग सारणी (non-singular) दाखवा.

उत्तर : दिलेले $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ आणि $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \ AB = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ |AB| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = 10 + 7 = 17 \neq 0$$

$\therefore \ AB$ हा पूर्ण कोटि वर्ग सारणी आहे.

सराव प्रश्न संच

1) सिद्ध करा की सारणी $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ हि पूर्ण कोटि वर्ग सारणी आहे

2) सिद्ध करा की सारणी $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ हि अपूर्ण कोटि वर्ग सारणी आहे

3) जर $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ तर सारणी A पूर्ण कोटि वर्ग सारणी दाखवा

4) जर $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ आणि $B = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ तर AB पूर्ण कोटि वर्ग सारणी आहे की नाही हे ठरवा?

आयुग्मी सारणी (मॅट्रिक्सचा ऍडजॉईन्ट - Adjoint of a matrix):

सह घटक सारणी (co-factor matrix) चा परिवर्त (transpose) म्हणजेच आयुग्मी सारणी (Adjoint of a matrix).

$$\therefore\ Adj(A) = \{Cof(A)\}' = \{Cof(A)\}^t = \left[C_{ij}\right]^T \ ; \quad C_{ij} = (-1)^{i+j} \times M_{ij}$$

घटकाचा माइनर (एलिमेंटचा माइनर - Minor of an element):

Minor (a_{ij}) = दिलेल्या सारणीमधून i^{th} पंक्ति आणि j^{th}स्तंभ काढून जे प्राप्त होते त्यास a_{ij} घटकाचा माइनर म्हणतात

माइनर निर्धारक (M_{ij}) (Determinant of Minor (M_{ij})):

माइनर घटकांचा निर्धारक म्हणजेच माइनर निर्धारक (M_{ij})

सोडवलेली उदाहरणे

1) जर $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ तर आयुग्मी सारणी शोधा (find Adj A)

उत्तर: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = +(7-20) = -13$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -(7-10) = 3$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = +(4-2) = 2$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -(14-12) = -2$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = +(7-6) = 1$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(4-4) = 0$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = +(10-3) = 7$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(5-3) = -2$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = +(1-2) = -1$$

$\therefore$सह घटक सारणी (Matrix of cofactors) = $\begin{bmatrix} -13 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \text{आयुग्मी सारणी} = Adj(A) \; = \; \{Cof(A)\}^t = \begin{bmatrix} -13 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

सराव प्रश्न संच

प्रश्नः खालील सारणींचा आयुग्मी (adjoint of matrix) शोधा

i) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ii) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ iv) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

सारणीचा व्यस्त (मॅट्रिक्सचा इन्व्हर्स - Inverse of a matrix):

जर सारणी A हा एक पूर्ण कोटि वर्ग सारणी (non-singular matrix) असेल आणि सारणी B असा की $A \times B = B \times A = I$ तर सारणी B हा A चा व्यस्त आहे.
सारणी A चा व्यस्त (inverse) A^{-1} ह्या चिन्हाने दर्शविला जातो. व त्याचे सूत्र खालीलप्रमाणे

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj\, A\,; \quad |A| \neq 0$$

सोडवलेली उदाहरणे

1) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ ह्या सारणीचा व्यस्त (inverse) शोधा.

उत्तर: दिलेले $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\therefore \; |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3(3+1) - 1(12-2) + 2(-4-2)$$

$$= 12 - 10 - 12 = -10 \neq 0$$

$$\therefore \; A^{-1} \; is \; exists$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = +(3+1) = 4$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(12-2) = -10$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = +(-4-2) = -6$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(3+2) = -5$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = +(9-4) = 5$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-3-2) = 5$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = +(1-2) = -1$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(3-8) = 5$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = +(3-4) = -1$$

$\therefore$सह घटक सारणी (Matrix of cofactors) $= \begin{bmatrix} 4 & -10 & -6 \\ -5 & 5 & 5 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

$\therefore$आयुग्मी सारणी $= Adj(A) \;=\; \{Cof(A)\}^t = \begin{bmatrix} 4 & -5 & -1 \\ -10 & 5 & 5 \\ -6 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

$\therefore$सारणीचा व्यस्त $= \; A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj\,A = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{-10}} \begin{bmatrix} 4 & -5 & -1 \\ -10 & 5 & 5 \\ -6 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

सराव प्रश्न संच

प्रश्नः खालील सारणींचा व्यस्त (inverse) शोधा.

i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 9 \\ 6 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ iv) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

एकसामायिक समीकरणांचे निराकरण (Solution of simultaneous equations):

समजा $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$

$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

तीन एकसामायिक समीकरणे आहेत

ही समीकरणे सारणीच्या रूपात खालीलप्रमाणे दर्शविली जातात.

$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$ म्हणजेच $AX = B$ जेथे

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

$AX = B \quad \therefore X = A^{-1}B$ जेथे $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj\, A$

यावरून आपल्याला x, y, z यांच्या किमती मिळतील

सोडवलेली उदाहरणे

1) सारणी पद्धतीने एकसामायिक समीकरणे सोडवा

$\boldsymbol{x + y + z = 3}$, $\boldsymbol{x + 2y + 3z = 4}$, $\boldsymbol{x + 4y + 9z = 6}$

उत्तर: $x + y + z = 3$

$x + 2y + 3z = 4$

$x + 4y + 9z = 6$

सारणी समीकरण (Matrix Equation) $AX = B$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 6 - 6 + 2 = 2 \neq 0$$

$\therefore \ A^{-1}\ is\ exists$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = +(18 - 12) = 6$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -(9 - 3) = -6$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = +(4 - 2) = 2$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = -(9 - 4) = -5$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = +(9 - 1) = 8$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4 - 1) = -3$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = +(3 - 2) = 1$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 1) = -2$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +(2 - 1) = 1$$

$\therefore$सह घटक सारणी (Matrix of cofactors) $= \begin{bmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore$आयुग्मी सारणी $= Adj(A) \;=\; \{Cof(A)\}^t = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore$सारणीचा व्यस्त $= \; A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj\,A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore X = A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 18-20+6 \\ -18+32-12 \\ 6-12-6 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \; \boldsymbol{x = 2}, \quad \boldsymbol{y = 1}, \quad \boldsymbol{z = 0}$$

सराव प्रश्न संच

प्रश्नः सारणी पद्धतीचा वापर करून खालील समीकरणे सोडवा

1. $x + y + z = 3; \quad 3x - 2y + 3z = 4; \quad 5x + 5y + z = 11$
2. $x + y = 4 - z\,, \quad y + z = 1 - 2x, \;\; x + z = y$
3. $2x + 3y = 5\,, \;\; y - 3z = -2, \;\; z + 3x = 4$
4. $x + y = 3; \quad y + z = 5; \quad z + x = 4$
5. $x + 3z = 2y + 4, \;\; 2x + y = 3z + 5, \;\; 2z + y = 3 + x$

भारतीय ज्ञान प्रणालीमध्ये बीजगणित (ALGEBRA IN INDIAN KNOWLEDGE SYSTEM:):

भारतीय गणित वापरून एकसामायिक समीकरणांचे निराकरण:

जेव्हा दोन चलांमधील दोन रेखीय समीकरणे, x आणि y म्हणा, एकाच वेळी x आणि y च्या समान मूल्यांसाठी समाधानी असतात, ज्याला एकसामायिक समीकरण म्हणतात. आधुनिक गणितात ते सोडवण्यासाठी विविध पद्धती विकसित केल्या गेल्या आहेत. बीजगणितानुसार, ते x किंवा y समान गुणांक बनवून सोडवले जातात आणि नंतर त्यांच्या चिन्हांवर अवलंबून बेरीज किंवा वजाबाकी करतात.
शाळेच्या काळात तुम्ही या पद्धतींचा अभ्यास केला असेल.

वैदिक गणित त्यांना सोडवण्यासाठी एक सोपी, लहान आणि लक्षात ठेवण्यास सोपी पद्धत प्रदान करते.

समजा $a_1x + b_1y = d_1$

$a_2x + b_2y = d_2$

हि एकसामायिक समीकरणे आहेत तर

$$x = \frac{d_1b_2 - b_1d_2}{a_1b_2 - b_1a_2} \text{ आणि } \; y = \frac{a_1d_2 - d_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$$

1) भारतीय गणित पद्धतीने एकसामायिक समीकरणे सोडवा

$3x - 2y = -3; \quad 2x + y = 5$

उत्तर: $3x - 2y = -3$

$2x + y = 5$

$$\therefore a_1 = 3, \quad b_1 = -2, \quad d_1 = -3,$$

$$a_2 = 2, \quad b_2 = 1, \quad d_2 = 5$$

$x = \dfrac{d_1 b_2 - b_1 d_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}$ आणि $y = \dfrac{a_1 d_2 - d_1 a_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}$

$$x = \frac{(-3)(1) - (-2)(5)}{(3)(1) - (2)(-2)} \quad , \quad y = \frac{(3)(5) - (-3)(2)}{(3)(1) - (2)(-2)}$$

$$x = \frac{-3 + 10}{3 + 4} \quad , \quad y = \frac{15 + 6}{3 + 4}$$

$$x = \frac{7}{7} \quad , \quad y = \frac{21}{7}$$

$$x = 1 \quad , \quad y = 3$$

सराव प्रश्न संच

प्रश्नः भारतीय गणित पद्धतीने एकसामायिक समीकरणे सोडवा

1. $2x + 3y = -1; \quad 3x - 2y = 5$
2. $11x + 6y = 21; \quad 8x - 5y = 34$
3. $x + 2y = 3; \quad 3x + 4y = 7$

C - आंशिक अपूर्णांक (पार्शियल फ्रॅक्शन - Partial fractions)

महत्वः (Significance) :

दिलेली पदावली (expression) विभक्त करण्यात आंशिक अपूर्णांक (Partial fraction) खूप महत्वाची भूमिका बजावते.

तर्कसंगत अपूर्णांक (Rational fraction - रॅशनल फ्रॅक्शन):

जर $P(x)$ आणि $Q(x)$ हया x मधील बहुपदी (polynomials) असतील तर $\frac{P(x)}{Q(x)}$, $Q(x) \neq 0$ या स्वरूपातील अपूर्णांकाला तर्कसंगत अपूर्णांक (Rational fraction) म्हणतात.

उदाहरणार्थ: $\frac{x^3+1}{x^2+2}$ हा तर्कसंगत अपूर्णांक (rational fraction) आहे

इथे तर्कसंगत अपूर्णांकाचे योग्य अपूर्णांक (proper fraction) आणि अयोग्य अपूर्णांक (improper fraction) असे दोन प्रकार आहेत.

योग्य अपूर्णांक (Proper fraction - प्रॉपर फ्रॅक्शन):

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ या अपूर्णांकात जर $P(x)$ ची कोटी $Q(x)$ च्या कोटी (degree) पेक्षा लहान असेल तर त्या अपूर्णांकास योग्य अपूर्णांक असे म्हणतात

उदाहरणार्थ: $\frac{x^2+1}{x^3+2}$ हा योग्य अपूर्णांक (proper fraction) आहे.

अयोग्य अपूर्णांक (Improper fraction - इमप्रॉपर फ्रॅक्शन):

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ या अपूर्णांकात जर $P(x)$ ची कोटी $Q(x)$ च्या कोटी (degree) जास्त किंवा समान असेल तर त्या अपूर्णांकास अयोग्य अपूर्णांक (Improper fraction) असे म्हणतात.

उदाहरणार्थ: $\frac{x^3+1}{x^2+2}$ हा अयोग्य अपूर्णांक (improper fraction) आहे.

अयोग्य अपूर्णांकाचे योग्य अपूर्णांकांत रूपांतरणः

अयोग्य अपूर्णांकाचे योग्य अपूर्णांकांत रूपांतरण करण्यासाठी भागाकार पद्धत वापरावी.

म्हणजेच, अयोग्य अपूर्णांक $(\text{Improper fraction}) = $ भागाकार $(\text{Quotient}) + \frac{\text{बाकी (Remainder)}}{\text{भाजक (Divisor)}}$

आंशिक अपूर्णांक (Partial Fraction - पार्शियल फ्रॅक्शन):

प्रत्येक योग्य अपूर्णांक (proper fraction) $\frac{P(x)}{Q(x)}$ हा साध्या अपूर्णांकाच्या बेरीज किंवा वजाबाकी स्वरूपात लिहिला येतो. या साध्या अपूर्णांकांना आंशिक अपूर्णांक (Partial Fraction) असे म्हणतात

उदाहरणार्थ: $\frac{1}{(x+3)(x+2)} = \frac{-1}{x+3} + \frac{1}{x+2}$

येथे $\frac{1}{(x+3)(x+2)}$ याचे $\frac{-1}{x+3}, \frac{1}{x+2}$ आंशिक अपूर्णांक आहेत.

आंशिक अपूर्णांक (Partial Fraction) शोधण्याच्या पद्धती: अपूर्णांकाच्या छेदाच्या (denominator) असलेल्या अवयव (गुणक) च्या स्वरूपावरून तीन वेगवेगळ्या पद्धती उदभवतात.

पद्धत -१ (CASE-I):

जेव्हा अपूर्णांकाच्या छेदाला (denominator) भिन्न (non repeated) आणि एकरेषीय (linear) अवयव (गुणक) असतात:

जेव्हा अपूर्णांकाच्या छेदाला भिन्न आणि एकरेषीय (ax+b) या स्वरूपातील अवयव (गुणक) असतात तेव्हा त्याचे आंशिक अपूर्णांक $\frac{A}{ax+b}$ असे असते

सर्वसाधारणपणे, $\frac{ax+b}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\beta)} + \frac{C}{(x-\gamma)}$

A.B.C ही स्थिर पदे आहेत ज्यांची किंमत आपल्याला काढायची आहे

सोडविलेली उदाहरणे

1) आंशिक रूपात (Partial Fractions) निराकरण करा: $\frac{\boldsymbol{x+4}}{\boldsymbol{x(x+1)}}$

उत्तर: समजा $\frac{x+4}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

$$\frac{x+4}{x(x+1)} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)}$$

$$\therefore\ x+4 = A(x+1)+Bx \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

$$Put\ \ x=0\ \ \ in\ \ (ii)$$

$$\therefore 0+4 = A(0+1)+B(0)$$

$$\therefore 4 = A \qquad \therefore A = 4$$

$$Put\ \ x=-1\ \ \ in\ \ (ii)$$

$\therefore\ -1+4 = A(-1+1) + B(-1)$

$\therefore 3 = B(-1) \qquad \therefore b = -3$

A आणि B च्या किमती समीकरण (i) मध्ये टाकल्यावर आंशिक रूपाचे निराकरण,

$$\frac{x+4}{x(x+1)} = \frac{4}{x} + \frac{-3}{x+1}$$

$$\therefore\ \frac{x+4}{x(x+1)} = \frac{4}{x} - \frac{3}{x+1}$$

2) आंशिक रूपात (Partial Fractions) निराकरण करा: $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x(x+1)(x+2)}}$

उत्तर: समजा $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$ ………… (i)

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A(x+1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x+2)}$$

$\therefore\ 1 = A(x+1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x+1)$ ………… (ii)

$Put\ \ x = 0\ \ in\ \ (ii)$

$1 = A(0+1)(0+2) + 0 + 0 \qquad \therefore 1 = A(2) \qquad \therefore A = \frac{1}{2}$

$Put\ \ x = -1\ \ in\ \ (ii)$

$1 = 0 + B(-1)(-1+2) + 0 \qquad \therefore 1 = B(-1) \qquad \therefore B = -1$

$Put\ \ x = -2\ in\ \ (ii)$

$1 = 0 + 0 + C(-2)(-2+1) \qquad \therefore 1 = C(2) \qquad \therefore C = \frac{1}{2}$

A, B आणि C च्या किमती समीकरण (i) मध्ये टाकल्यावर आंशिक रूपाचे निराकरण,

$$\therefore\ \boldsymbol{\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1/2}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1/2}{x+2}}$$

3) आंशिक रूपात (Partial Fractions) निराकरण करा: $\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{(x+2)(x^2-1)}}$

उत्तर: $\frac{2x-1}{(x+2)(x^2-1)} = \frac{2x-1}{(x+2)(x+1)(x-1)}$

समजा $\frac{2x-1}{(x+2)(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$ ………… (i)

$$\frac{2x-1}{(x+2)(x+1)(x-1)} = \frac{A(x+1)(x-1) + B(x+2)(x-1) + C(x+2)(x+1)}{(x+2)(x+1)(x-1)}$$

$$\therefore\ 2x-1 = A(x+1)(x-1) + B(x+2)(x-1) + C(x+2)(x+1) \ \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

$Put \ \ x = -2 \ \ in \ \ (ii)$

$$2(-2)-1 = A(-2+1)(-2-1) + 0 + 0 \qquad \therefore -5 = A(-1)(-3) \qquad \therefore A = -\frac{5}{3}$$

$Put \ \ x = -1 \ \ in \ \ (ii)$

$$2(-1)-1 = 0 + B(-1+2)(-1-1) + 0 \qquad \therefore -3 = B(1)(-2) \qquad \therefore B = \frac{3}{2}$$

$Put \ \ x = 1 \ in \ \ (ii)$

$$2(1)-1 = 0 + 0 + C(1+2)(1+1) \qquad \therefore 1 = C(3)(2) \qquad \therefore C = \frac{1}{6}$$

A, B आणि C च्या किमती समीकरण (i) मध्ये टाकल्यावर आंशिक रूपाचे निराकरण,

$$\boldsymbol{\frac{2x-1}{(x+2)(x+1)(x-1)} = \frac{-5/3}{x+2} + \frac{3/2}{x+1} + \frac{1/6}{x-1}}$$

सराव प्रश्न संच

प्रश्नः आंशिक रूपात (Partial Fractions) निराकरण कराः

1) $\frac{2x}{(x+2)(x-1)}$

2) $\frac{x+5}{x(x-1)}$

3) $\frac{x}{x^2+4x+3}$

4) $\frac{x-2}{x^2-x}$

4) $\frac{x^2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

6) $\frac{x+3}{x(x+2)(x+5)}$

7) $\frac{x-5}{x^3+3x^2-6x}$

8) $\frac{x^2+6x-8}{x^3-4x}$

9) $\frac{x^2+1}{x(x^2-1)}$

10) $\frac{3x-1}{x^3-3x^2+2x}$

योग्य पर्याय निवडून पद्धत १ च्या स्वरूपात आलेली उदाहरणे

1) आंशिक रूपात (Partial Fractions) निराकरण कराः $\frac{\boldsymbol{logx+1}}{\boldsymbol{(logx+2)(logx+3)}}$

उत्तर : समजा $logx = t$

$$\therefore \frac{logx+1}{(logx+2)(logx+3)} = \frac{t+1}{(t+2)(t+3)}$$

समजा $\frac{t+1}{(t+2)(t+3)} = \frac{A}{(t+2)} + \frac{B}{(t+3)}$ ………… (i)

$$\frac{t+1}{(t+2)(t+3)} = \frac{A(t+3)+B(t+2)}{(t+2)(t+3)}$$

$\therefore\ t+1 = A(t+3)+B(t+2)$ ………… (ii)

$Put\ \ t=-2\ \ in\ (ii)\qquad -2+1 = A(-2+3)+B(-2+2)$

$\therefore -1 = A(1)\qquad \therefore A=-1$

$Put\ \ t=-3\ \ in\ (ii)\qquad -3+1 = A(-3+3)+B(-3+2)$

$-2 = B(-1)\qquad \therefore B = 2$

A आणि B च्या किमती समीकरण (i) मध्ये टाकल्यावर आंशिक रूपाचे निराकरण,

$$\frac{t+1}{(t+2)(t+3)} = \frac{-1}{(t+2)} + \frac{2}{(t+3)}$$

$$\therefore\ \frac{t+1}{(t+2)(t+3)} = \frac{2}{(t+3)} - \frac{1}{(t+2)}$$

आता $t = logx$ टाकू या

$$\boldsymbol{\frac{logx+1}{(logx+2)(logx+3)} = \frac{2}{(logx+3)} - \frac{1}{(logx+2)}}$$

सराव प्रश्न संच

प्रश्नः आंशिक रूपात (Partial Fractions) निराकरण करा:

1) $\frac{sin\theta+1}{(sin\theta+2)(sin\theta+3)}$ 2) $\frac{tan\theta}{(tan\theta-2)(tan\theta-3)}$

3) $\frac{x^2+1}{2x^4+5x^2+2}$ 4) $\frac{e^x+1}{(e^x+2)(e^x-3)}$

पद्धत -२ (CASE II):

जेव्हा अपूर्णांकाच्या छेदाला (denominator) एकरेषीय पुनरावृत्ती झालेले अवयव (गुणक) (repeated linear factors) असतातः

सर्वसाधारणपणे, $\frac{ax+b}{(x+\alpha)(x+\beta)^2} = \frac{A}{(x+\alpha)} + \frac{B}{(x+\beta)} + \frac{C}{(x+\beta)^2}$

येथे $(x+\alpha)$ हा एकरेषीय व एकदाच आलेला घटक आहे आणि $(x+\beta)$ हा एकरेषीय पुनरावृत्ती झालेला घटक आहे. A, B, C हे स्थिर पदे आहेत ज्यांची किंमत आपल्याला काढायची आहे.

सोडविलेली उदाहरणे

1) आंशिक रूपात (Partial Fractions) निराकरण करा: $\frac{\mathbf{1}}{(x+2)(x+1)^2}$

उत्तरः समजा $\frac{1}{(x+2)(x+1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$ ……… (1)

$1 = A(x+1)^2 + B(x+2)(x+1) + C(x+2)$ ……… (2)

$Put \quad x = -2 \qquad in\, eq. (2)$

$1 = A(-2+1)^2 + B(-2+2)(-2+1) + C(-2+2)$

$1 = A \ (-1)^2 + 0 + 0$

$\therefore \quad A = 1$

$Put \quad x = -1 \qquad in\, eq. (2)$

$1 = A(-1+1)^2 + B(-1+2)(-1+1) + C(-1+2)$

$1 = 0 + 0 + C(1)$

$\therefore \quad C = 1$

$Put \quad x = 0 \quad \& \quad A = 1,\ C = 1 \quad in\, eq. (2)$

$1 = 1(0+1)^2 + B(0+2)(0+1) + 1(0+2)$

$1 = (1)^2 + B\,(2)(1) + 2$

$1 = 1 + B\,(2) + 2$

$\therefore \quad -2 = B \ (2)$

$B = -1$

A,B आणि C च्या किमती समीकरण (1) मध्ये टाकल्यावर आंशिक रूपाचे निराकरण

$$\frac{\mathbf{1}}{(x+2)(x+1)^2} = \frac{\mathbf{1}}{x+2} - \frac{\mathbf{1}}{x+1} + \frac{\mathbf{1}}{(x+1)^2}$$

2) आंशिक रूपात (Partial Fractions) निराकरण कराः $\frac{x^2-2x-7}{(x-1)(x^2-1)}$

उत्तर : $\frac{x^2-2x-7}{(x-1)(x^2-1)} = \frac{x^2-2x-7}{(x-1)(x-1)(x+1)} = \frac{x^2-2x-7}{(x+1)(x-1)^2}$

समजा, $\frac{x^2-2x-7}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$ ……… (1)

$x^2 - 2x - 7 = A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1)$ ……… (2)

$Put \quad x = -1 \qquad in\ eq. (2)$

$(-1)^2 - 2(-1) - 7 = A(-1-1)^2 + B(-1+1)(1-1) + C(-1+1)$

$1 + 2 - 7 = A \quad (-2)^2 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0$

$-4 = A \quad (4)$

$\therefore \quad A = \frac{-4}{4} = -1$

$Put \quad x = 1 \qquad in\ eq. (2)$

$(1)^2 - 2(1) - 7 = A(1-1)^2 + B(1+1)(1-1) + C(1+1)$

$1 - 2 - 7 = \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad C(2)$

$-8 = C \quad (2)$

$\therefore \quad C = \frac{-8}{2} = -4$

$Put \quad x = 0 \quad \& \quad A = -1, \; C = -4 \quad in\ eq. (2)$

$(0)^2 - 2(0) - 7 = -1(0-1)^2 + B(0+1)(0-1) + (-4)(0+1)$

$-7 = -1(1) \quad + B\,(1)(-1) - 4$

$-7 = \quad -5 \quad + B\,(-1)$

$-7 + 5 = \; B \quad (-1)$

$\therefore \quad B = 2$

A,B आणि C च्या किमती समीकरण (1) मध्ये टाकल्यावर आंशिक रूपाचे निराकरण

$$\boldsymbol{\frac{x^2-2x-7}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{4}{(x-1)^2}}$$

सराव प्रश्न संच

प्रश्न: आंशिक रूपात (Partial Fractions) निराकरण करा:

1) $\frac{3x+4}{(x+6)(x+2)^2}$ 2) $\frac{3x+5}{(x+3)(x+1)^2}$

3) $\frac{x^2}{(x+1)(x^2-1)}$ 4) $\frac{2x^2+3}{(x-2)(x+1)^2}$

पद्धत - ३ (CASE III):

जेव्हा अपूर्णांकाच्या छेदाला (denominator) अवयव न पडणारे आणि पुनरावृत्ती नसणारे द्विपद अवयव (गुणक) (non repeated irreducible quadratic factor) असतात:

सर्वसाधारणपणे, $\frac{ax+b}{(x+\alpha)(x^2+\beta)} = \frac{A}{(x+\alpha)} + \frac{Bx+C}{(x^2+\beta)}$

येथे $(x+\alpha)$ हा एकरेषीय व एकदाच आलेला घटक आहे आणि $(x^2+\beta)$ याचे अवयव अस्तित्वात नाहीत. A, B, C हे स्थिर पदे आहेत ज्यांची किंमत आपल्याला काढायची आहे

सोडविलेली उदाहरणे

1) आंशिक रूपात (Partial Fractions) निराकरण करा $\frac{2x-3}{(x+1)(x^2+4)}$

उत्तरः समजा, $\frac{2x-3}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$ ……… (1)

दोन्ही बाजूंना $(x+1)(x^2+4)$ ने गुणाकार केल्यास मिळेल

$2x-3 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x+1)$ ……… (2)

$Put\ \ x=-1 \quad in\ eq.(2)$

$2(-1)-3 = A((-1)^2+4) + (B(-1)+C)(-1+1)$

$-2-3 = A\ (1+4) + 0$

$-5 = A\ (5)$

$\therefore\ A = -1$

$Put\ \ x=0\ ,\ A=-1 \quad in\ eq.(2)$

$2(0)-3 = (-1)((0)^2+4) + (B(0)+C)(0+1)$

$0-3 = (-1)(4) + (0+C)(1)$

$-3 = -4 + C$

$\therefore \quad C = 1$

$Put \quad x = 1 \quad \& \quad A = -1, \; C = 1 \quad in\; eq.(2)$

$2(1) - 3 = (-1)((1)^2 + 4) + (B(1) + 1)(1 + 1)$

$2 - 3 = (-1)(1 + 4) + (B + 1)(2)$

$-1 = -5 + 2B + 2$

$-1 + 3 = 2B$

$\therefore \quad B = 1$

A,B आणि C च्या किमती समीकरण (1) मध्ये टाकल्यावर आंशिक रूपाचे निराकरण

$$\frac{\mathbf{2x-3}}{\mathbf{(x+1)(x^2+4)}} = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{x+1}} + \frac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{x^2+4}}$$

2) आंशिक रूपात (Partial Fractions) निराकरण करा $\frac{x}{(x^3+1)}$

उत्तरः $\frac{x}{(x^3+1)} = \frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)}$

समजा, $\frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \; \dots\dots\dots (1)$

दोन्ही बाजूंना $(x + 1)(x^2 - x + 1)$ ने गुणाकार केल्यास मिळेल

$x = A\,(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1) \dots\dots\dots (2)$

$Put \quad x = -1 \quad in\; eq.(2)$

$-1 = A((-1)^2 - (-1) + 1) + (B(-1) + C)(-1 + 1)$

$-1 = A \; (1 + 1 + 1) + 0$

$-1 = A \; (3)$

$\therefore \quad A = -\frac{1}{3}$

$Put \quad x = 0\,, \; A = -\frac{1}{3} \quad in\; eq.(2)$

$0 = \left(-\frac{1}{3}\right)((0)^2 - 0 + 1) + (B(0) + C)(0 + 1)$

$0 = \left(-\frac{1}{3}\right)(1) + (0 + C)(1)$

$$0 = -\frac{1}{3} + C$$

$$\therefore \quad C = \frac{1}{3}$$

$$Put \quad x = 1 \quad \& \quad A = -\frac{1}{3},\ C = \frac{1}{3} in\ eq.(2)$$

$$1 = \left(-\tfrac{1}{3}\right)((1)^2 - 1 + 1) + \left(B(1) + \tfrac{1}{3}\right)(1 + 1)$$

$$1 = \left(-\tfrac{1}{3}\right)(1 - 1 + 1) + \left(B + \tfrac{1}{3}\right)(2)$$

$$1 = \left(-\tfrac{1}{3}\right)(1) + \left(2B + \tfrac{2}{3}\right)$$

$$1 = \tfrac{1}{3} + 2B \quad \therefore \quad 1 - \tfrac{1}{3} = 2B \quad \therefore \quad \tfrac{2}{3} = 2B$$

$$\therefore \quad B = \frac{1}{3}$$

A,B आणि C च्या किमती समीकरण (1) मध्ये टाकल्यावर आंशिक रूपाचे निराकरण

$$\therefore \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{(x+1)(x^2-x+1)}} = \frac{\boldsymbol{-\frac{1}{3}}}{\boldsymbol{x+1}} + \frac{\boldsymbol{\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}}{\boldsymbol{x^2-x+1}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}\left[\frac{-1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2-x+1}\right]}$$

सराव प्रश्न संच

प्रश्न: आंशिक रूपात (Partial Fractions) निराकरण कराः

1) $\frac{x^2+23x}{(x+3)(x^2+1)}$ 2) $\frac{x+5}{(x-2)(x^2+3)}$

3) $\frac{x^2+1}{(x+1)(x^2+4)}$ 4) $\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)}$

5) $\frac{3x+1}{(x-1)(x^2+1)}$ 6) $\frac{x}{x^3-1}$

7) $\frac{x-2}{x^3+1}$ 8) $\frac{x^2+1}{x^3+1}$

9) $\frac{x+2}{(x+1)(x^2+1)}$ 10) $\frac{1}{x^3-1}$

अयोग्य अपूर्णांकांचे आंशिक अपूर्णांक (Partial fraction of improper fraction):

सोडविलेली उदाहरणे

1) आंशिक अपूर्णांकात (Partial Fractions) निराकरण करा $\frac{x^3+x}{x^2-9}$

उत्तरः दिलेला अपूर्णांक $\frac{x^3+x}{x^2-9}$ हा अयोग्य अपूर्णांक आहे.

∴ भागाकार पद्धतीने त्याचे योग्य अपूर्णांकात करू

$$x^2-9) \quad x^3+x \quad (x$$
$$-(x^3-9x)$$
$$\overline{\quad 10x \quad}$$

अयोग्य अपूर्णांक (Improper fraction) = भागाकार (Quotient) + $\frac{\text{बाकी (Remainder)}}{\text{भाजक (Divisor)}}$

$\frac{x^3+x}{x^2-9} = x + \frac{10x}{x^2-9} = x + \frac{10x}{(x-3)(x+3)} \ldots\ldots\ldots (1)$

समजा, $\frac{10x}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} \ldots\ldots\ldots (2)$

$10x = A\,(x+3) + B(x-3) \ldots\ldots\ldots (3)$

$Put \;\; x = 3$

$10(3) = A\,(3+3) + B(3-3)$

$30 = A(6) + 0$

$\therefore A = 5$

$Put \;\; x = -3$

$10(-3) = A\,(-3+3) + B(-3-3)$

$-30 = 0 + B(-6)$

$\therefore B = 5$

A आणि B च्या किमती समीकरण (2) आणि (1) मध्ये टाकल्यावर आंशिक रूपाचे निराकरण

समीकरण (2) → $\frac{10x}{(x-3)(x+3)} = \frac{5}{x-3} + \frac{5}{x+3}$

समीकरण (1) → $\frac{x^3+x}{x^2-9} = x + \frac{5}{x-3} + \frac{5}{x+3}$

2) आंशिक अपूर्णांकात (Partial Fractions) निराकरण करा $\frac{x^3}{x^2-1}$

उत्तरः दिलेला अपूर्णांक $\frac{x^3}{x^2-1}$ हा अयोग्य अपूर्णांक आहे.

$\therefore$ भागाकार पद्धतीने त्याचे योग्य अपूर्णांकात करू

$$x^2-1)\quad x^3 \quad (x$$
$$-(x^3-x)$$
$$\overline{\quad x \quad}$$

अयोग्य अपूर्णांक (Improper fraction) = भागाकार (Quotient) + $\frac{\text{बाकी (Remainder)}}{\text{भाजक (Divisor)}}$

$$\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1} = x + \frac{X}{(x-1)(x+1)} \dots\dots\dots (1)$$

समजा, $\frac{X}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \dots\dots\dots (2)$

$x = A\,(x+1) + B(x-1) \dots\dots\dots (3)$

$Put\ \ x = 1$

$(1) = A\,(1+1) + B(1-1)$

$1 = A(2) + 0$

$\therefore A = \frac{1}{2}$

$Put\ \ x = -1$

$-1 = A\,(-1+1) + B(-1-1)$

$-1 = 0 + B(-2)$

$\therefore B = \frac{1}{2}$

A आणि B च्या किमती समीकरण (2) आणि (1) मध्ये टाकल्यावर आंशिक रूपाचे निराकरण

समीकरण (2) $\rightarrow \frac{X}{(x-1)(x+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1}$

समीकरण (1) $\rightarrow \frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1}$

सराव प्रश्न संच

प्रश्न: आंशिक अपूर्णांकात (Partial Fractions) निराकरण करा :

1) $\frac{x^3+2}{x^2-1}$ 2) $\frac{x^3+x}{x^2-4}$ 3) $\frac{x^3+1}{x^2+2x}$

4) $\frac{x^3+1}{x^2+6x}$ 5) $\frac{x^3+X}{x^2-9}$ 6) $\frac{x^2+x}{x^2-4}$

घटक –II (Unit – II)

त्रिकोणमिती (Trigonometry) ट्रिग्नॉमेट्री

विषय निष्पत्ती (Course Outcome):

शाखा विशिष्ट अभियांत्रिकी समस्या सोडवण्यासाठी त्रिकोणमिती चा वापर करणे.

घटक निष्पत्ती (Theory Learning Outcomes) :

TLO 2.1 दिलेल्या सोप्या अभियांत्रिकी समस्या सोडवण्यासाठी मिश्र कोन (Compound Angle), संयुक्त कोन (Allied angle) आणि गुणितकोन (Multiple Angles) ही संकल्पना लागू करणे.

TLO 2.2 दिलेल्या सोप्या अभियांत्रिकी संबंधित समस्या सोडवण्यासाठी विभाजित कोण (Submultiple Anlge) संकल्पना लागू करणे.

TLO 2.3 दिलेल्या सोप्या अभियांत्रिकी समस्या सोडवण्यासाठी विभाजन (Factorization) आणि De-Factorization फॉर्म्युलाची संकल्पना लागू करणे

TLO 2.4 व्यस्त त्रिकोणमितीय (Inverse Trigonometry) गुणोत्तरांचा वापर करून दिलेल्या सोप्या समस्यांचे अन्वेषण करणे

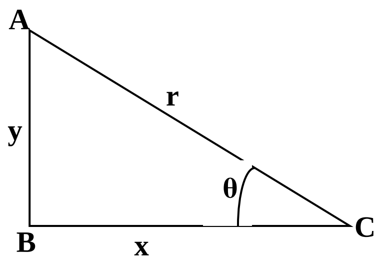
TLO 2.5 दिलेल्या समस्यांचे निराकरण करण्यासाठी त्रिकोणमितीसाठी प्राचीन भारतीय गणितातील संकल्पना वापरणे.

ओळख (Introduction): काटकोन त्रिकोणाच्या बाजू आणि कोन यांच्या परस्पर संबंधांचा अभ्यास करणाऱ्या गणित शाखेस त्रिकोणामिती (Trigonometry-ट्रिग्नॉमेट्री) असे म्हणतात. सध्या त्रिकोणमिति (Trigonometry) ही विविध क्षेत्रात लागू केली जाते जसे की अप्लाइड मेकॅनिक्स (Applied mechanics), नेवीगेशन (navigation), इलेक्ट्रिकल टेक्नॉलॉजी (Electrical technology), कंप्यूटर इंजीनियरिंग (Computer engineering) इत्यादी.

काही महत्वाची सूत्रे:

a) काटकोन त्रिकोणासाठी:

$$\sin\theta = \frac{\text{संमुखबाजू (Opposite side)}}{\text{कर्ण (Hypotenuse)}} = \frac{y}{r}$$



$$\cos\theta = \frac{\text{लगतची बाजू (Adjecent side)}}{\text{कर्ण}} = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{संमुखबाजू}}{\text{लगतची बाजू}} = \frac{y}{x}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{लगतची बाजू}}{\text{संमुखबाजू}} = \frac{x}{y}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लगतची बाजू}} = \frac{r}{x}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{संमुखबाजू}} = \frac{r}{y}$$

b) त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांमधील परस्परसंबंध:

1) $\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$, $\sin\theta.\operatorname{cosec}\theta = 1$

2) $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, $\cos\theta.\sec\theta = 1$

3) $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$, $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$, $\cot\theta.\tan\theta = 1$

4) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

c) मूलभूत नित्यसमानता (Fundamental Identities):

1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $\quad \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ $\quad \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

2) $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ $\quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ $\quad \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

3) $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$ $\quad 1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$ $\quad \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1$

d) Measures of an angle (कोनाचे मापन):कोन मापनासाठी दोन प्रणाली वापरण्यात येतात.

i) Sexagesimal system (Degree): या प्रणाली मध्ये मोजमापाचे युनिट डिग्री (degree) आहे.

ii) Circular systems (Radian) : या प्रणाली मध्ये मोजमापाचे युनिट रेडियन (radian) आहे.

e) डिग्री आणि रेडियन दरम्यानचा संबंध:

डिग्री मधील कोन = θ^0 आणि रेडियन मधील कोन = θ^c असे दर्शविले जातात.

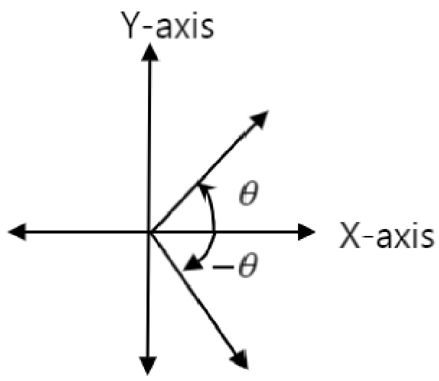
1. डिग्री (degree) मधील कोनाचे रेडियन (radian) मधील कोनामध्ये रूपांतर करण्यासाठी

$$\theta^c = \theta^0 x \frac{\pi}{180}$$

2. रेडियन (radian) मधील कोनाचे डिग्री (degree) मधील कोनामध्ये रूपांतर करण्यासाठी

$$\theta^0 = \theta^c x \frac{180}{\pi}$$

f) ऋणकोन (Negative Angle):



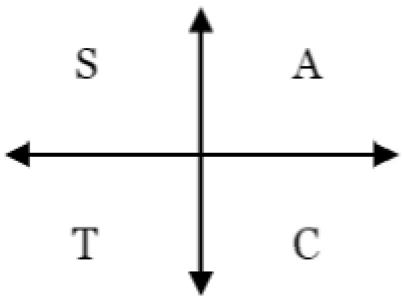
व्याख्या (Definition) : ज्या कोनाचे मापन घड्याळ्याच्या विरुद्ध दिशेने केले जाते त्या कोनाला ऋण कोन (negative angle) म्हणतात.

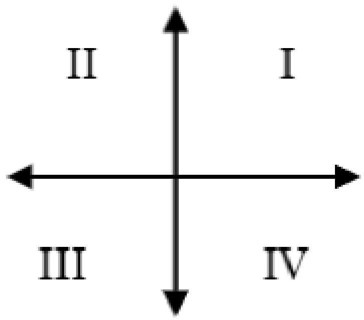
ऋण कोणाशी संबंधित सूत्रे

1) $\cos(-\theta) = \cos\theta$ 2) $\sec(-\theta) = \sec\theta$ 3) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$.

4) $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ 5) $\cot(-\theta) = -\cot\theta$ 6) $\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

g) चिन्हांचे नियम (Sign Convention):-





1. पहिले चरण - सगळे त्रिकोणमितीय गुणोत्तर (trigonometric ratios) हे धन (positive) असतात.

2. दुसरे चरण – sinθ आणि cosec θ हे धन (positive) उर्वरित सर्व ऋण (negative) असतात.

3. तिसरे चरण – tan θ आणि cot θ हे धन (positive) उर्वरित सर्व ऋण (negative) असतात.

4. चौथे चरण – cos θ आणि sec θ हे धन (positive) उर्वरित सर्व ऋण (negative) असतात.

h) त्रिकोणमितीय गुणोत्तर व त्याच्या किमती

कोन (θ) / त्रिकोणमितीय गुणोत्तर	0^0	30^0 or $\frac{\pi^c}{6}$	45^0 or $\frac{\pi^c}{4}$	60^0 or $\frac{\pi^c}{3}$	90^0 or $\frac{\pi^c}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞ Not define
$\cot\theta$	∞ Not define	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞ Not define
$\mathrm{cosec}\theta$	∞ Not define	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

मिश्र कोन (Compound Angle) आणि संयुक्त कोन (Allied angle)

मिश्र कोन (Compound angle - कंपाउंड अँगल) :

व्याख्या (Definition): दिलेल्या कोनाच्या बेरीज अथवा वजाबाकी मधून निर्माण होणाऱ्या कोनाला मिश्र कोन (Compound angle) म्हणतात .A + B, A – B हे A आणि B चे मिश्र (Compound Angles) आहेत.

उदाहरणार्थ :जर A = 60°, B = 45° तर A+B = 60° + 45° = 105° आणि A - B = 60°-45° = 15° हे मिश्र कोन (Compound Angles) आहेत.

मिश्र कोनाची जोड आणि वजाबाकी सूत्र (Addition & Subtraction formulae of compound angles):

1) $\sin(A + B) = \sin A.\cos B + \cos A.\sin B$
2) $\sin(A - B) = \sin A.\cos B - \cos A.\sin B$
3) $\cos(A + B) = \cos A.\cos B - \sin A.\sin B$
4) $\cos(A - B) = \cos A.\cos B + \sin A.\sin B$
5) $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A.\tan B}$
6) $\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A.\tan B}$
7) $\sin(A + B).\sin(A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \cos^2 A$
8) $\cos(A + B).\cos(A - B) = \cos^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \sin^2 A$

उदाहरणे

1) गणकयंत्राचा (calculator) वापर न करता खालील किमती (value) शोधा

a) $\cos(105^0)$ b) $\sin(75^0)$

उत्तर: a) $105^0 = 60^0 + 45^0$

$\cos(105^0) = \cos(60^0 + 45^0)$

$= \cos 60^0 . \cos 45^0 - \sin 60^0 . \sin 45^0$ ... $\cos(A + B) = \cos A . \cos B - \sin A . \sin B$

$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ...... $\{\cos 60^0 = \frac{1}{2}, \cos 45^0 = \sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\}$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$\cos(105^0) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

b) $75^0 = 45^0 + 30^0$

$\sin(75^0) = \sin(45^0 + 30^0)$

$= \sin 45^0 . \cos 30^0 + \cos 45^0 . \sin 30^0$ .... $\sin(A + B) = \sin A . \cos B + \cos A . \sin B$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$ ....$\{\cos 45^0 = \sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} . \sin 30^0 = \frac{1}{2} \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\sin(75^0) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

2) जर $\tan A = \frac{1}{2}, \tan B = \frac{1}{3}$ तर $\tan(A + B)$ ची किंमत शोधा

उत्तर: $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A . \tan B}$

$= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}$

$= \frac{\frac{3+2}{6}}{1-\frac{1}{6}}$

$= \frac{\frac{5}{6}}{\frac{6-1}{6}}$

$$= \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}$$

$\tan(A + B) = 1$

3) सिद्ध करा $\sin(A + B) . \sin(A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

उत्तर: डावी बाजू = $\sin(A + B) . \sin(A - B)$

$= (\sin A. \cos B + \cos A. \sin B). (\sin A. \cos B - \cos A. \sin B)$

$= \sin^2 A. \cos^2 B - \cos^2 A. \sin^2 B \quad .... (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$= \sin^2 A(1 - \sin^2 B) - (1 - \sin^2 A)\sin^2 B$

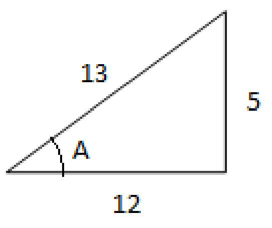
$= \sin^2 A - \sin^2 A. \sin^2 B - \sin^2 B + \sin^2 A. \sin^2 B$

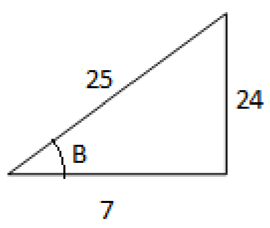
$= \sin^2 A - \sin^2 B$

= उजवी बाजू

4) जर $\sin A = \frac{-5}{13}$, $\cos B = \frac{-7}{25}$ आणि A, B हे तिसऱ्या चरणात (third quadrant) असतील तर $\sin(A - B)$ ची मूल्य शोधा .

उत्तर: $\sin A = \frac{-5}{13}$ $\cos B = \frac{-7}{25}$





$\cos A = \frac{12}{13}$ $\sin B = \frac{24}{25}$

A आणि B हे तिसऱ्या चरणात आहेत

म्हणून $\cos A$ ऋण आणि $\sin B$ ऋण

$\cos A = \frac{-12}{13}$ $\sin B = \frac{-24}{25}$

$\sin(A - B) = \sin A.\cos B - \cos A.\sin B$

$= \left(\frac{-5}{13}\right)\left(\frac{-7}{25}\right) - \left(\frac{-12}{13}\right)\left(\frac{-24}{25}\right)$

$= \frac{35}{325} - \frac{288}{325}$

$= \frac{35-288}{325}$

$\sin(A - B) = \frac{-253}{325}$

स्वाध्याय

1) गणनयंत्राचा (calculator), उपयोग न करता मूल्य (value) शोधा.

a) sin 105° b) tan 75° c) tan 15° d) tan 105°

2) गणनयंत्राचा (calculator) उपयोग न करता किंमत काढा. $\frac{\tan 32+\tan 88}{1-\tan 32.\tan 88}$

3) जर A आणि B विशाल कोण असतील तसेच $\sin A = \frac{5}{13}$ आणि $\cos B = \frac{-4}{5}$ असेल तर cos (A+B) ची मूल्य शोधा

4) सिद्ध करा $1 + \tan A.\tan 2A = \sec 2A$

5) सिद्ध करा $\frac{\sin 2A}{\sin A} - \frac{\cos 2A}{\cos A} = \sec A$

संयुक्त कोन (Allied Angles - अलाईड अँगल) :

दोन कोनांच्या मापनाची बेरीज (sum) अथवा फरक (difference) हा 0 किंवा 90° चा पूर्णांकी बहूल (integral multiple), म्हणजे $\pm$ n. $\frac{\pi}{2}$ असेल तर त्या कोनाला संयुक्त कोन (Allied angles) म्हणतात.

θ हा कोन असेल आणि समजा α हा संयुक्त कोन (allied angle) आहे तर

$\alpha + \theta = n.\frac{\pi}{2}$, $\alpha = n.\frac{\pi}{2} - \theta$ हा θ चा संयुक्त कोन (allied angle) आहे

आणि $\alpha - \theta = n.\frac{\pi}{2}$, $\alpha = n.\frac{\pi}{2} + \theta$ हा θ चा संयुक्त कोन (allied angle) आहे.

कोन θ साठी; $n.\frac{\pi}{2} \pm \theta$ हे θ चे संयुक्त कोन (allied angle) आहेत.

सर्वसाधारणपणे वरील परिणाम (results) खालील प्रमाणे लिहिता येतील

जर n हा सम पूर्णांक (even integer) असेल,

$$\sin\left(n.\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \pm\sin\theta \quad , \quad \cos\left(n.\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \pm\cos\theta$$

जर n विषम पूर्णांक (odd integer) असेल

$$\sin\left(n.\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \pm\cos\theta \qquad \cos\left(n.\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \pm\sin\theta$$

बैजिक चिन्ह (algebraic sign) हे कोन (angle) $n.\frac{\pi}{2} \pm \theta$ कोणत्या चरण (quadrant) मध्ये आहे याच्यावर अवलंबून असते.

$(\pi - \theta)$ (दुसरे चरण)	$(\pi + \theta)$ (तिसरे चरण)	$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ (पहिले चरण)	$\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ (दुसरे चरण)
$\sin(\pi - \theta)$ = sinθ	$\sin(\pi + \theta)$ = - sinθ	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ = cosθ	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ = cosθ
$\cos(\pi - \theta)$ = - cosθ	$\cos(\pi + \theta)$ = - cosθ	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ = sinθ	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ = - sinθ
$\tan(\pi - \theta)$ = - tanθ	$\tan(\pi + \theta)$ = tanθ	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ = cotθ	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ = - cotθ
$\cot(\pi - \theta)$ = - cotθ	$\cot(\pi + \theta)$ = cotθ	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ = tanθ	$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ = - tanθ
$\sec(\pi - \theta)$ = - secθ	$\sec(\pi + \theta)$ = - secθ	$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ = cosecθ	$\sec\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ = - cosecθ
cosec$(\pi - \theta)$ = cosecθ	**cosec$(\pi + \theta)$ =-cosecθ**	**cosec$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ = secθ**	**cosec$\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ = secθ**

उदाहरणे

1) गणनयंत्राचा (कॅल्क्युलेटर) उपयोग न करता मूल्य शोधा.

i) $\cos(330^0)$ ii) $\cot(-710^0)$ iii) $\sec(3660^0)$

उत्तर: i) $\cos(330^0) = \cos(270^0 + 60^0)$

$= \cos(3x90^0 + 60^0)$

$= +\sin 60^0$ .....n= 3 विषम पूर्णांक आणि 330^0 चौथ्या चरणात

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

ii) $\cot(-675^0) = -\cot(675^0)$ .... $\cot(-\theta) = -\cot\theta$

$= -\cot(630 + 45)$

$= -\cot(7x90 + 45)$

$= -(-\tan 45)$ .... n= 7 विषम पूर्णांक आणि 675^0 चौथ्या चरणात

$= \tan 45$

= 1

iii) $\sec(3660^0) = \sec(3600^0 + 60)$

$= \sec(40x90^0 + 60)$

$= +\sec(60)$ .... n= 40 सम पूर्णांक आणि 3660^0 पहिल्या चरणात

= 2

2) गणनयंत्राचा उपयोग न करता मूल्य शोधा.

$\cos(570^0).\sin(510^0) + \sin(-330^0).\cos(-390^0)$

उत्तर: $\cos(570^0) = \cos(7x90 - 60) = -\sin 60 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(510^0) = \sin(5x90 + 60) = +\cos 60 = \frac{1}{2}$

$\sin(-330^0) = -\sin 330 = -\sin(4x90 - 30) = -(-\sin 30) = \sin 30 = \frac{1}{2}$

$\cos(-390^0) = \cos 390 = \cos(4x90 + 30) = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos(570^0).\sin(510^0) + \sin(-330^0).\cos(-390^0) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= 0$$

3) सरळ रूप द्या $\frac{\cos^2(180^0-\theta)}{\sin(-\theta)} + \frac{\cos^2(270^0-\theta)}{\sin(180^0+\theta)}$

उत्तर: $\cos(180^0 - \theta) = -\cos\theta$

$\cos(270^0 + \theta) = \sin\theta$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\sin(180^0 + \theta) = -\sin\theta$

$$\frac{\cos^2(180^0 - \theta)}{\sin(-\theta)} + \frac{\cos^2(270^0 - \theta)}{\sin(180^0 + \theta)} = \frac{[\cos(180-\theta)]^2}{-\sin\theta} + \frac{[\cos(270-\theta)]^2}{-\sin\theta}$$

$$= \frac{[-\cos\theta]^2}{-\sin\theta} + \frac{[\sin\theta]^2}{-\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{-\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{-\sin\theta}$$

$$= -\mathrm{cosec}\theta$$

स्वाध्याय

1) गणनयंत्राचा उपयोग न करता मूल्य शोधा.

a) tan (780^0) b) cosec(-960^0) c) cos(675^0)

2) गणनयंत्राचा उपयोग न करता मूल्य शोधा.

i) $\sin(420^0).\cos(390^0) + \cos(-300^0).\sin(-330^0)$

ii) $\tan(585^0).\cot(-495^0) - \cot(405^0).\tan(-495^0)$

iii) $\frac{\sec^2(135^0)}{\cos(-240^0) - 2.\sin(930^0)}$

गुणितकोन (Multiple Angles - मल्टिपल अँगल) :

कोन 2A, 3A, 4A, …….. यांना A चा गुणित कोन (Multiple Angles) म्हणतात.

उदा. जर A = 30° तर 2A = 60°, 3A = 90°, 4A = 120° …etc.

गुणक कोणाचे सूत्रे

1) $\sin 2A = 2\sin A.\cos A$

$= \frac{2.\tan A}{1+\tan^2 A}$

2) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$= 2.\cos^2 A - 1$

$= 1 - 2.\sin^2 A$

$= \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

3) $1 - \cos 2A = 2.\sin^2 A$

4) $1 + \cos 2A = 2.\cos^2 A$

5) $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

6) $\sin(3A) = 3\sin A - 4\sin^3 A$

7) $\cos(3A) = 4\cos^3 A - 3\cos A$

8) $\tan(3A) = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

उदाहरणे

1) जर sinA = $\frac{1}{2}$ तर sin3A चे मूल्य शोधा

उत्तर: दिलेले मूल्य sinA = $\frac{1}{2}$

$\sin(3A) = 3\sin A - 4\sin^3 A$

$= 3\left(\frac{1}{2}\right) - 4\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$$= \frac{3}{2} - \frac{4}{8}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2}{2}$$

$$\sin(3A) = 1$$

2) जर cosA= 0.4 तर cos2A चे मूल्य शोधा

उत्तर: दिलेले मूल्य cosA= 0.4

$$\cos 2A = 2.\cos^2 A - 1$$

$$= 2(0.4)^2 - 1$$

$$= 2(0.16) - 1$$

$$= 0.32 - 1$$

$$\cos 2A = -0.68$$

3) जर $A = 30^0$ तर पडताळून पहा

i) $\sin(3A) = 3\sin A - 4\sin^3 A$

ii) $\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

उत्तर: दिलेले मूल्य $A = 30^0$

i) डावी बाजू = $\sin(3A)$

= $\sin(3X30)$

= $\sin(90)$

= 1 ....(1)

उजवी बाजू = $3\sin A - 4\sin^3 A$

= $3\sin 30 - 4\sin^3(30)$

= $3\left(\frac{1}{2}\right) - 4\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$= \frac{3}{2} - 4\left(\frac{1}{8}\right)$

$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$

$= \frac{3-1}{2}$

$= \frac{2}{2}$

$= 1$ ....(2)

समीकरण (1) व (2) वरून

डावी बाजू = उजवी बाजू

ii) डावी बाजू = $\cos 2A$

$= \cos(2x30)$

$= \cos 60$

$= \frac{1}{2}$ .... (1)

उजवी बाजू = $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

$= \frac{1-\tan^2 30}{1+\tan^2 30}$

$= \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$

$= \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}$

$= \frac{\frac{3-1}{3}}{\frac{3+1}{3}}$

$= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}$

$= \frac{1}{2}$ ......(2)

समीकरण (1) व (2) वरून

डावी बाजू = उजवी बाजू

4) सिद्ध करा $\frac{\sin 2A+\cos A}{1-\cos 2A+\sin A} = \cot A$

उत्तर: डावी बाजू = $\frac{\sin 2A+\cos A}{1-\cos 2A+\sin A}$

$= \frac{2\sin A.\cos A+\cos A}{2\sin^2 A+\sin A}$ .... $\sin 2A = 2\sin A.\cos A,\ 1-\cos 2A = 2.\sin^2 A$

$= \frac{\cos A\,(2\sin A+1)}{\sin A\,(2\sin A+1)}$

$= \frac{\cos A}{\sin A}$

= cotA

= उजवी बाजू

5) सिद्ध करा $\frac{\sin 4A+\sin 2A}{1+\cos 2A+\cos 4A} = \tan 2A$

उत्तर: डावी बाजू = $\frac{\sin 4A+\sin 2A}{1+\cos 2A+\cos 4A}$

$= \frac{\sin 2(2A)+\sin 2A}{1+\cos 2A+\cos 2(2A)}$

$= \frac{\sin 2(2A)+\sin 2A}{1+\cos 2(2A)+\cos 2A}$

$= \frac{2\sin 2A.\cos 2A+\sin 2A}{2\cos^2 2A+\cos 2A}$

$= \frac{\sin 2A(\cos 2A+1)}{\cos 2A(\cos 2A+1)}$

$= \frac{\sin 2A}{\cos 2A}$

= tan2A = उजवी बाजू

स्वाध्याय

1) जर sinA= 0.8 तर cos3A चे मूल्य शोधा
2) जर sinA= 0.4 तर i) cos2A ii) sin3A चे मूल्य शोधा
3) जर $A = 60^0$ तर i) $\cos 2A = 1-2.\sin^2 A$ ii) $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ पडताळून पहा
4) सिद्ध करा $\frac{\sin 9A}{\sin 3A} - \frac{\cos 9A}{\cos 3A} = 2$

विभाजित कोण (Submultiple Angle - सब मल्टिपल अँगल) :

कोन $\frac{A}{2},\frac{A}{3},\frac{A}{4}$ ...... यांना कोण A चे विभाजित कोण (Submultiple Angle) म्हणतात.

विभाजित कोणाचे सूत्रे:

1) $\sin A = 2\sin\left(\frac{A}{2}\right).\cos\left(\frac{A}{2}\right)$

$$= \frac{2.\tan\left(\frac{A}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{A}{2}\right)}$$

2) $\cos A = \cos^2\left(\frac{A}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{A}{2}\right)$

$$= 2.\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) - 1$$

$$= 1 - 2.\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$= \frac{1-\tan^2\left(\frac{A}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{A}{2}\right)}$$

3) $1 - \cos A = 2.\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)$

4) $1 + \cos A = 2.\cos^2\left(\frac{A}{2}\right)$

5) $\tan A = \frac{2\tan\left(\frac{A}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{A}{2}\right)}$

उदाहरणे

1) जर $\tan\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ तर sinA चे मूल्य शोधा

उत्तर: दिलेले मूल्य $\tan\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\sin A = \frac{2.\tan\left(\frac{A}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{A}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{3+1}{3}}$$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} . \frac{3}{4}$$

$$\sin A = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2) सिद्ध करा $\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$

उत्तर: डावी बाजू = $\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$

$$= \frac{1-\cos\theta+\sin\theta}{1+\cos\theta+\sin\theta}$$

$$= \frac{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right).\left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \tan\frac{\theta}{2}$$

= उजवी बाजू

3) सिद्ध करा $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$

उत्तर: डावी बाजू = $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$= \tan\frac{\theta}{2}$ = उजवी बाजू

स्वाध्याय

1) जर $\tan\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ तर cosA चे मूल्य शोधा

2) जर $\tan\left(\frac{A}{2}\right) = 0.6$ तर tanA चे मूल्य शोधा

3) सिद्ध करा $\frac{\cos A}{1-\sin A} = \frac{1+\tan\left(\frac{A}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{A}{2}\right)}$

विभाजन (Factorization - फॅक्टोरायझेशन) आणि De- Factorization - डी फॅक्टोरायझेशन सूत्रे (formulae):

➢ **Factorization Formulae:**

1) $\sin C + \sin D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right).\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$

2) $\sin C - \sin D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right).\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$

3) $\cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right).\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$

4) $\cos C - \cos D = -2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right).\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$

or

$$= 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right).\sin\left(\frac{D-C}{2}\right)$$

➢ **Deactorization Formulae:**

1) $2\sin A.\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

2) $2\cos A.\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

3) $2\cos A.\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$

4) $2\sin A.\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

उदाहरणे

1) गुणाकारात रुपांतर करा. (Express into product form):

   a) $\mathbf{sin80^0 - sin50^0}$

   b) $\mathbf{cos40^0 - cos(-10^0)}$

   c) $\mathbf{cos\left(\frac{7\pi}{13}\right) - cos\left(\frac{5\pi}{13}\right)}$

उत्तर: a) $\mathbf{sin80^0 - sin50^0 = 2cos\left(\frac{80^0+50^0}{2}\right).sin\left(\frac{80^0-50^0}{2}\right)}$

$$= \mathbf{2cos\left(\frac{130^0}{2}\right).sin\left(\frac{30^0}{2}\right)}$$

$$= \mathbf{2cos(65^0).sin(15^0)}$$

b) $\mathbf{cos40^0 - cos(-10^0) = cos40^0 - cos(10^0)}$ .... $\mathbf{cos(-\theta) = cos\,\theta}$

$$= \mathbf{-2sin\left(\frac{40^0+10^0}{2}\right).sin\left(\frac{40^0-10^0}{2}\right)}$$

...... $\mathbf{cosC - cosD = -2sin\left(\frac{C+D}{2}\right).sin\left(\frac{C-D}{2}\right)}$

$$= \mathbf{-2sin\left(\frac{50^0}{2}\right).sin\left(\frac{30^0}{2}\right)}$$

$$= \mathbf{-2sin(25^0).sin(15^0)}$$

c) $\mathbf{cos\left(\frac{7\pi}{13}\right) - cos\left(\frac{5\pi}{13}\right) = -2sin\left(\frac{\frac{7\pi}{13}+\frac{5\pi}{13}}{2}\right).sin\left(\frac{\frac{7\pi}{13}-\frac{5\pi}{13}}{2}\right)}$

$$= \mathbf{-2sin\left(\frac{\frac{7\pi+5\pi}{13}}{2}\right).sin\left(\frac{\frac{7\pi-5\pi}{13}}{2}\right)}$$

$$= \mathbf{-2sin\left(\frac{\frac{12\pi}{13}}{2}\right).sin\left(\frac{\frac{2\pi}{13}}{2}\right)}$$

$$= \mathbf{-2sin\left(\frac{12\pi}{26}\right).sin\left(\frac{2\pi}{26}\right)}$$

$$= \mathbf{-2sin\left(\frac{6\pi}{13}\right).sin\left(\frac{\pi}{13}\right)}$$

2) त्रिकोणमितीय फल (trigonometric functions) चे रूपांतर बेरीज (sum) अथवा फरक (difference) मध्ये करा: a) $2\cos 75° \sin 15°$ b) $\sin55^0.\cos35^0$

उत्तर: a) $2\cos 75° \sin 15° = \sin(75° + 15°) - \sin(75° - 15°)$

$$= \sin(90°) - \sin(60°)$$

b) $\sin 55^0 . \cos 25^0 = \frac{1}{2}[2\sin 55^0 . \cos 25^0]$

$$= \frac{1}{2}[\sin(55^0 + 25^0) + \sin(55^0 - 25^0)]$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(80^0) + \sin(30^0)]$$

3) सिद्ध करा $\frac{\sin 8A + \sin 2A}{\cos 8A + \cos 2A} = \tan 5A$

उत्तर: : डावी बाजू $= \frac{\sin 8A + \sin 2A}{\cos 8A + \cos 2A}$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{8A+2A}{2}\right).\cos\left(\frac{8A-2A}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{8A+2A}{2}\right).\cos\left(\frac{8A-2A}{2}\right)} \quad .... \sin C + \sin D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right).\cos\left(\frac{C-D}{2}\right),$$

$$\cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right).\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{10A}{2}\right).\cos\left(\frac{6A}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{10A}{2}\right).\cos\left(\frac{6A}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\sin(5A).\cos(3A)}{2\cos(5A).\cos(3A)}$$

$$= \frac{\sin(5A)}{\cos(5A)}$$

$$= \tan 5A$$

= उजवी बाजू

4) सिद्ध करा $\frac{\sin A + 2\sin 2A + \sin 3A}{\cos A + 2\cos 2A + \cos 3A} = \tan 2A$

उत्तर: : डावी बाजू $= \frac{\sin A + 2\sin 2A + \sin 3A}{\cos A + 2\cos 2A + \cos 3A}$

$$= \frac{\sin A + \sin 3A + 2\sin 2A}{\cos A + \cos 3A + 2\cos 2A}$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{A+3A}{2}\right).\cos\left(\frac{A-3A}{2}\right) + 2\sin 2A}{2\cos\left(\frac{A+3A}{2}\right).\cos\left(\frac{A-3A}{2}\right) + 2\cos 2A}$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{4A}{2}\right).\cos\left(\frac{-2A}{2}\right) + 2\sin 2A}{2\cos\left(\frac{4A}{2}\right).\cos\left(\frac{-2A}{2}\right) + 2\cos 2A}$$

$$= \frac{2\sin(2A).\cos(-A) + 2\sin 2A}{2\cos(2A).\cos(-A) + 2\cos 2A}$$

$= \frac{2\sin(2A)[\cos(-A)+1]}{2\cos(2A).[\cos(-A)+1]}$

$= \frac{\sin 2A}{\cos 2A}$

$= \tan 2A$

= उजवी बाजू

5) सिद्ध करा $\frac{\sin A+2\sin 3A+\sin 5A}{\sin 3A+2\sin 5A+\sin 7A} = \cos 2A - \cot 5A.\sin 2A$

उत्तर: : डावी बाजू $= \frac{\sin A+2\sin 3A+\sin 5A}{\sin 3A+2\sin 5A+\sin 7A}$

$= \frac{\sin A+\sin 5A+2\sin 3A}{\sin 3A+\sin 7A+2\sin 5A}$

$= \frac{2\sin\left(\frac{A+5A}{2}\right).\cos\left(\frac{A-5A}{2}\right)+2\sin 3A}{2\sin\left(\frac{3A+7A}{2}\right).\cos\left(\frac{3A-7A}{2}\right)+2\sin 5A}$

$= \frac{2\sin\left(\frac{6A}{2}\right).\cos\left(\frac{-4A}{2}\right)+2\sin 3A}{2\sin\left(\frac{10A}{2}\right).\cos\left(\frac{-4A}{2}\right)+2\sin 5A}$

$= \frac{2\sin(3A).\cos(-2A)+2\sin 3A}{2\sin(5A).\cos(-2A)+2\sin 5A}$

$= \frac{2\sin(3A)[\cos(-2A)+1]}{2\sin(5A)[\cos(-2A)+1]}$

$= \frac{\sin(3A)}{\sin(5A)}$

$= \frac{\sin(5A-2A)}{\sin(5A)}$

$= \frac{\sin 5A.\cos 2A-\cos 5A.\sin 2A}{\sin(5A)}$

$= \frac{\sin 5A.\cos 2A}{\sin(5A)} - \frac{\cos 5A.\sin 2A}{\sin(5A)}.$

$= \cos 2A - \cot 5A.\sin 2A$

= उजवी बाजू

6) सिद्ध करा $\sin 10^0 . \sin 30^0 . \sin 50^0 . \sin 70^0 = \frac{1}{16}$

उत्तर: : डावी बाजू $= \sin 10^0 . \sin 30^0 . \sin 50^0 . \sin 70^0$

$= \sin 10^0 . \frac{1}{2} . \sin 50^0 . \sin 70^0$ .... $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} . [\sin 10^0 . \sin 50^0 . \sin 70^0]$

$= \frac{1}{2} . \frac{1}{2} (2\sin 10^0 . \sin 50^0) . \sin 70^0$

$= \frac{1}{4} \left(\cos(10^0 - 50^0) - \cos(10^0 + 50^0)\right) \sin 70^0$

$= \frac{1}{4} \left(\cos(-40^0) - \cos(60^0)\right) \sin 70^0$

$= \frac{1}{4} \left(\cos(40^0) - \frac{1}{2}\right) \sin 70^0$ .... $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$

$= \frac{1}{4} \left(\cos 40^0 . \sin 70^0 - \frac{1}{2} \sin 70^0\right)$

$= \frac{1}{4} . \frac{1}{2} (2\cos 40^0 . \sin 70^0 - \sin 70^0)$

$= \frac{1}{8} (\sin(40^0 + 70^0) - \sin(40^0 - 70^0) - \sin 70^0)$

$= \frac{1}{8} (\sin 110^0 - \sin(-30^0) - \sin 70^0)$

$= \frac{1}{8} (\sin(180^0 - 70^0) + \sin(30^0) - \sin 70^0)$ ...... $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$= \frac{1}{8} (\sin(70^0) + \sin(30^0) - \sin 70^0)$ .... $\sin(180^0 - \theta) = \sin\theta$

$= \frac{1}{8} \sin(30^0)$

$= \frac{1}{8} . \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{16}$

= उजवी बाजू

स्वाध्याय

1) गुणाकारात रुपांतर करा. (Express into product form):

   i) $\sin 80^0 - \cos 70^0$ ii) $\sin 50^0 + \cos 80^0$

   iii) $\sin 9\theta - \sin 7\theta$ iv) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

2) त्रिकोणमितीय फल (trigonometric functions) चे रूपांतर बेरीज (sum) अथवा फरक (difference) मध्ये करा:

   i) $2\sin 75^0 . \cos 45^0$ ii) $2\cos 6\theta . \cos 2\theta$

   iii) $2\sin 11\theta . \sin 3\theta$ iv) $\cos 50^0 . \cos 35^0$

3) सिद्ध करा $\frac{\sin 3A - \sin A}{\cos 3A + \cos A} = \tan A$

4) सिद्ध करा $\frac{\sin 7x + \sin x}{\cos 5x - \cos 3x} = \sin 2x - \cos 2x . \cot x$

5) सिद्ध करा $\frac{\cos 2A + 2\cos 4A + \cos 6A}{\cos A + 2\cos 3A + \cos 5A} = \cos A - \tan 3A . \sin A$

6) सिद्ध करा $\sin 15^0 . \sin 30^0 . \sin 60^0 . \sin 75^0 = \frac{\sqrt{3}}{16}$

7) सिद्ध करा $\cos 20^0 . \cos 40^0 . \cos 80^0 = \frac{1}{8}$

8) सिद्ध करा $\cos 10^0 . \cos 50^0 . \cos 70^0 = \frac{\sqrt{3}}{8}$

व्यस्त त्रिकोणमितीय गुणोत्तर (Inverse Trigonometric Ratios - इन्वर्स ट्रिग्नॉमेट्री रेशोज)

व्याख्या (Definition):

जर $\sin\theta = x$ तर θ ला x चा साइन व्यस्त (sine inverse) असे संबोधतात. आणि ते पुढील प्रमाणे दर्शविले जाते $\sin^{-1}x = \theta$

जर $\sin\theta = x$ तर $\theta = \sin^{-1}x$

त्याचप्रमाणे,

जर $\cos\theta = x$ तर $\theta = \cos^{-1}x$

जर $\tan\theta = x$ तर $\theta = \tan^{-1}x$

जर $\cot\theta = x$ तर $\theta = \cot^{-1}x$

जर $\sec\theta = x$ तर $\theta = \sec^{-1}x$

जर $\mathrm{cosec}\theta = x$ तर $\theta = \mathrm{cosec}^{-1}x$

मुख्य मूल्य (Principal Value) :

$$\sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^0$$

$$\sin 135^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 135^0$$

$$\sin 405^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 405^0$$

म्हणजे आपल्याकडे खालील मूल्य आहेत $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^0, 135^0, 405^0 \ldots\ldots$

चे एकमेव मूल्य नाही तर ते बहूमूल्य फल (multivalued function) आहे. उपयोजनाच्या दृष्टिकोन सर्वात लहान (smallest) मूल्याचे (value) अधिक महत्त्व आहे आणि म्हणूनच याला मुख्य मूल्य (Principal value) असे म्हटले जाते.

$\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^\circ$ किंवा $\frac{\pi}{4}$ हे मुख्य मूल्य (Principal value) आहे.

व्यस्त त्रिकोणमितीचे (Inverse Trigonometry - इन्वर्स ट्रिग्नॉमेट्री) गुणधर्म (Properties):

गुणधर्म (Property) I :

1) $\sin^{-1}(x) = \mathrm{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$
2) $\cos^{-1}(x) = \sec^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$
3) $\tan^{-1}(x) = \cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$
4) $\cot^{-1}(x) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$
5) $\sec^{-1}(x) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$
6) $\mathrm{cosec}^{-1}(x) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

गुणधर्म (Property) II :

1) $\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta$
2) $\cos^{-1}(\cos\theta) = \theta$
3) $\tan^{-1}(\tan\theta) = \theta$
4) $\cot^{-1}(\cot\theta) = \theta$
5) $\sec^{-1}(\sec\theta) = \theta$
6) $\mathrm{cosec}^{-1}(\mathrm{cosec}\theta) = \theta$

गुणधर्म (Property) III :

1) $\sin(\sin^{-1}x) = x$
2) $\cos(\cos^{-1}x) = x$
3) $\tan(\tan^{-1}x) = x$
4) $\cot(\cot^{-1}x) = x$
5) $\sec(\sec^{-1}x) = x$
6) $\operatorname{cosec}(\operatorname{cosec}^{-1}x) = x$

गुणधर्म (Property) IV :

1) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}(x)$
2) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}(x)$
3) $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}(x)$
4) $\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1}(x)$
5) $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1}(x)$
6) $\operatorname{cosec}^{-1}(-x) = -\operatorname{cosec}^{-1}(x)$

गुणधर्म (Property) V :

1) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$
2) $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$
3) $\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

गुणधर्म (Property) VI :

1) If $x > 0, y > 0$ and $xy < 1$ then

   $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left[\frac{x+y}{1-xy}\right]$

2) If $x > 0, y > 0$ and $xy > 1$ then

   $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \pi + \tan^{-1}\left[\frac{x+y}{1-xy}\right]$

3) If $x > 0, y > 0$ then

   $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left[\frac{x-y}{1+xy}\right]$

उदाहरणे

1) मुख्य मूल्य (Principal Value) शोधा

a) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ b) $\cos\left[\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$ c) $\cot^{-1}(-\sqrt{3})$

उत्तर: a) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\theta$

आपणास माहित आहे कि, जर $\theta=\sin^{-1}x$ तर $\sin\theta=x$

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad .... \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

म्हणून $\theta=\frac{\pi}{3}$

$$\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$$

b) $\cos\left[\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$

$$\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\theta$$

$$\frac{1}{2}=\sin\theta$$

$$\sin\frac{\pi}{6}=\sin\theta$$

म्हणून $\theta=\frac{\pi}{6}$

$$\cos\left[\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\cos\left(\frac{6\pi-2\pi}{12}\right)$$

$$=\cos\left(\frac{4\pi}{12}\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos\left[\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}$$

c) $\cot^{-1}(-\sqrt{3})=\theta$

आपणास माहित आहे कि, जर $\theta=\cot^{-1}x$ तर $\cot\theta=x$

$$-\sqrt{3}=\cot\theta$$

$\sqrt{3} = -\cot\theta$

$\sqrt{3} = \cot(-\theta)$

$\cot\frac{\pi}{6} = \cot(-\theta)$

म्हणून $-\theta = \frac{\pi}{6}$

$\theta = -\frac{\pi}{6}$

$\cot^{-1}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{6}$

2) सिद्ध करा $\tan^{-1}\left(\frac{1}{11}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{\pi}{4}$

उत्तर: $x = \frac{1}{11} > 0, y = \frac{5}{6} > 0$ आणि $x.y = \frac{1}{11}.\frac{5}{6} = \frac{5}{66} < 1$

डावी बाजू = $\tan^{-1}\left(\frac{1}{11}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)$

$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{1}{11}+\frac{5}{6}}{1-\frac{1}{11}.\frac{5}{6}}\right]$ .... $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left[\frac{x+y}{1-xy}\right]$

$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{6+55}{66}}{1-\frac{5}{66}}\right]$

$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{61}{66}}{\frac{66-5}{66}}\right]$

$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{61}{66}}{\frac{61}{66}}\right]$

$= \tan^{-1}1$

$= \frac{\pi}{4}$ .... $\tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$

= उजवी बाजू

3) सिद्ध करा $\tan^{-1}\left(\frac{2}{11}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{7}{24}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

उत्तर: $x = \frac{2}{11} > 0, y = \frac{7}{24} > 0$ आणि $x.y = \frac{2}{11}.\frac{7}{24} = \frac{14}{264} < 1$

डावी बाजू = $\tan^{-1}\left(\frac{2}{11}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{7}{24}\right)$

$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{2}{11}+\frac{7}{24}}{1-\frac{2}{11}\cdot\frac{7}{24}}\right]$ .... $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left[\frac{x+y}{1-xy}\right]$

$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{48+77}{264}}{1-\frac{14}{264}}\right]$

$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{125}{264}}{\frac{264-14}{264}}\right]$

$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{125}{264}}{\frac{250}{264}}\right]$

$= \tan^{-1}\left[\frac{125}{250}\right]$

$= \tan^{-1}\left[\frac{1}{2}\right]$

= उजवी बाजू

4) सिद्ध करा $\tan^{-1}(1) + \tan^{-1}(2) + \tan^{-1}(3) = \pi$

उत्तर: $x = 1 > 0, y = 2 > 0$ आणि $x.y = 1.2 = 2 > 1$

डावी बाजू $= \tan^{-1}(1) + \tan^{-1}(2) + \tan^{-1}(3)$

$= \pi + \tan^{-1}\left[\frac{1+2}{1-1.2}\right] + \tan^{-1}(3)$

$= \pi + \tan^{-1}\left[\frac{3}{1-2}\right] + \tan^{-1}(3)$

$= \pi + \tan^{-1}\left[\frac{3}{-1}\right] + \tan^{-1}(3)$

$= \pi + \tan^{-1}(-3) + \tan^{-1}(3)$

$= \pi - \tan^{-1}(3) + \tan^{-1}(3)$ .... $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}(x)$

$= \pi$

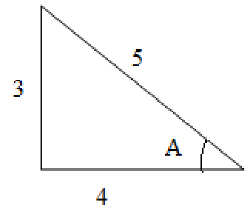
= उजवी बाजू

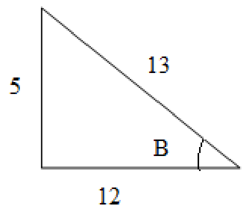
5) सिद्ध करा $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{56}{65}\right)$

उत्तर: $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = A$ तसेच $\cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) = B$

म्हणून $\sin A = \frac{3}{5}$ आणि $\cos B = \frac{12}{13}$

पायथागोरस प्रमेय वापरून





$\cos A = \frac{4}{5}$ आणि $\sin B = \frac{5}{13}$

$$\sin(A+B) = \sin A.\cos B + \cos A.\sin B$$

$$= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right)$$

$$= \left(\frac{36}{65}\right) + \left(\frac{20}{65}\right)$$

$$= \frac{36+20}{65}$$

$$\sin(A+B) = \frac{56}{65}$$

म्हणून, $A + B = \sin^{-1}\left(\frac{56}{65}\right)$

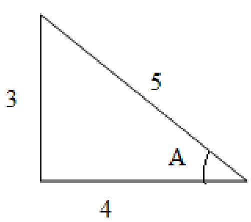
$$\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{56}{65}\right)$$

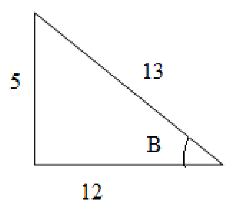
6) सिद्ध करा $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{63}{65}\right)$

उत्तर: $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = A$ तसेच $\sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) = B$

म्हणून $\cos A = \frac{4}{5}$ आणि $\sin B = \frac{5}{13}$

पायथागोरस प्रमेय वापरून





$\sin A = \frac{3}{5}$ आणि $\cos B = \frac{12}{13}$

$$\cos(A-B) = \cos A.\cos B + \sin A.\sin B$$

$$= \frac{4}{5}.\frac{12}{13} + \frac{3}{5}.\frac{5}{13}$$

$$= \frac{48}{65} + \frac{15}{65}$$

$$= \frac{48+15}{65}$$

$$\cos(A - B) = \frac{63}{65}$$

म्हणून, $A - B = \cos^{-1}\left(\frac{63}{65}\right)$

$$\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{63}{65}\right)$$

स्वाध्याय

1) मुख्य मूल्य (Principal Value) शोधा

i) $\sin^{1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ ii) $\sin\left[\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ iii) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

iv) $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ v) $\cos\left[\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right]$

2) सिद्ध करा $\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right) = \cot^{-1}(2)$

3) सिद्ध करा $\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{13}\right) = \cot^{-1}\left(\frac{9}{2}\right)$

4) सिद्ध करा $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$

5) सिद्ध करा $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{33}{65}\right)$

6) सिद्ध करा $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{8}{17}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{77}{85}\right)$

7) सिद्ध करा $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$

भारतीय ज्ञान प्रणालीतील त्रिकोणमिती: भारतातील साइन फंक्शनची उत्क्रांती.

(Trigonometry in Indian Knowledge System: The Evolution of Sine Function in India.)

साईन साठी भास्करांचे अंदाज

7व्या शतकातील भारतीय गणितज्ञ भास्कर (c.600 c.680) यांनी sine फंक्शनसाठी एक उल्लेखनीय अंदाजे प्राप्त केले. त्यानंतरच्या अनेक प्राचीन लेखकांनी या नियमाच्या आवृत्त्या दिल्या आहेत, परंतु कोणीही पुरावा प्रदान केला नाही किंवा परिणाम कसा प्राप्त झाला याचे वर्णन केले नाही.

भास्करांचे sine फंक्शनसाठी अंदाजे सूत्र $\sin\Theta = \frac{4\Theta.(180-\Theta)}{40500-\Theta.(180-\Theta)}$

उदाहरणे

1) भास्कर साइन फॉर्म्युला वापरून खालील साइन फंक्शनचे मूल्य शोधा

i) $\sin 50^0$ ii) $\sin 30^0$

उत्तर: i) $\Theta = 50^0$

$$\sin\Theta = \frac{4\Theta.(180-\Theta)}{40500-\Theta.(180-\Theta)}$$

$$\sin 50^0 = \frac{4x50(180-50)}{40500-50.(180-50)} = \frac{200x130}{40500-50x130} = \frac{26000}{34000} = 0.764705$$

ii) $\Theta = 30^0$

$$\sin\Theta = \frac{4\Theta.(180-\Theta)}{40500-\Theta.(180-\Theta)}$$

$$\sin 30^0 = \frac{4x30(180-30)}{40500-30.(180-30)} = \frac{120x150}{40500-30x150} = \frac{18000}{36000} = 0.5$$

स्वाध्याय

1) भास्कर sine फॉर्म्युला वापरून खालील साइन फंक्शनचे मूल्य शोधा

i) $\sin 20^0$ ii) $\sin 75^0$

भारतीय त्रिकोणमिती: मूलभूत भारतीय त्रिकोणमिती- परिचय आणि शब्दावली (प्राचीन सुरुवातीपासून नीलकंठापर्यंत).

(Indian Trigonometry: Basic Indian Trigonometry- Introduction and Terminology (From Ancient Beginnings to Nilakantha).)

भारतीय ज्ञान प्रणालीतील त्रिकोणमिती: सुलबसूत्रातील पायथागोरियन त्रिगुण.

(Trigonometry in Indian Knowledge System: Pythagorean triples in Sulabsutra.)

पायथागोरियन त्रिगुण सूत्र

पायथागोरियन त्रिगुण (Pythagorean triples) सूत्र काटकोन त्रिकोणापासून (right angle triangle) तयार झाला आहे. काटकोन त्रिकोणाच्या बाजू (sides) वाढत्या क्रमाने मांडल्या जातात. पायथागोरसच्या त्रिगुणातील तीनपैकी दोन मूल्ये (value) दिल्यास, तिसरे पायथागोरस प्रमेयातून मिळू शकते ज्याला पायथागोरियन त्रिगुण सूत्र असेही म्हणतात.

पायथागोरसचे प्रमेय असे सांगते की काटकोन त्रिकोणामध्ये कर्णाचा (hypogenous) वर्ग (square) हा पाया
(base) आणि लंबाच्या (perpendicular) वर्गांच्या (square) बेरजेइतका (sum) असतो. लंब (perpendicular) 'a' ने दर्शविला जातो, पाया 'b' ने दर्शविला जातो आणि कर्ण 'c' ने दर्शविला जातो, तर पायथागोरियन ट्रिपल्स फॉर्म्युला असेल $c^2 = a^2 + b^2$

पायथागोरियन त्रिगुण कसे तयार करावे ?

पायथागोरियन त्रिगुण हे धन पूर्णांक आहेत आणि त्या संख्येसाठी दोन प्रकरणे आहेत जी आपल्याला पायथागोरियन त्रिगुण तयार करण्यात मदत करू शकतात. संख्या एकतर विषम (odd) किंवा सम (even) असू शकतात. वर नमूद केलेल्या प्रकरणांचे तपशीलवार वर्णन खालीलप्रमाणे केले जाऊ शकते:

संख्या विषम (odd) असल्यास

जर संख्या (m) विषम (odd) असेल तर खालील सूत्राचा वापर करून इतर दोन संख्या शोधून त्रिगुण बनवता येईल.

$$(a, b, c) = \left[m,\ \frac{m^2-1}{2},\ \frac{m^2+1}{2}\right]$$

जर संख्या सम (even) असल्यास

जर संख्या (m) सम (even) असेल तर खालील सूत्राचा वापर करून इतर दोन संख्या शोधून त्रिगुण बनवता येईल.

$$(a, b, c) = \left[m,\ \frac{m^2-4}{4},\ \frac{m^2+4}{4}\right]$$

उदाहरणे

1) जर m = 3 असल्यास, बाकीचे पायथागोरियन त्रिगुण (Pythagorean triples) शोधा.

उत्तर: m = 3 विषम (odd)

$$(a, b, c) = \left[m,\ \frac{m^2-1}{2},\ \frac{m^2+1}{2}\right] = \left[3,\ \frac{3^2-1}{2},\ \frac{3^2+1}{2}\right] = (3,\ \ 4,\ \ 5)$$

$(3, 4, 5)$ हे पायथागोरियन त्रिगुण आहेत.

2) जर m = 6 असल्यास, बाकीचे पायथागोरियन त्रिगुण (Pythagorean triples) शोधा.
उत्तर: m = 6 सम (even)

$$(a, b, c) = \left[m,\ \frac{m^2-4}{4},\ \frac{m^2+4}{4}\right] = \left[6,\ \frac{6^2-4}{4},\ \frac{6^2+4}{4}\right] = (6,\ \ 8,\ \ 10)$$

$(6, 8, 10)$ हे पायथागोरियन त्रिगुण आहेत.

घटक-३ (Unit 3)

सरळ रेषा (Straight Line) स्ट्रेट लाइन

- **विषय निष्पत्ती: (Course Outcome):**

सरळ रेषांच्या (straight lines) संबंधित नियमावर आधारित मूलभूत अभियांत्रिकी समस्यांचे निराकरण करणे.

- **सिद्धांत शिक्षण परिणाम** (TLO's) CO's **च्या संरेखित**.
  [Theory Learning Outcomes (TLO's)aligned to CO's.]:

TLO 3.1 दिलेल्या दोन सरळ रेषांमधील कोनांची (angle) गणना करणे.

TLO 3.2 दिलेल्या अभियांत्रिकी समस्यांशी संबंधित सरळ रेषांचे (straight lines) समीकरण तयार करणे.

TLO 3.3 दिलेल्या बिंदूपासून रेषेपर्यंतचे लंब अंतर (perpendicular distance) ओळखणे.

TLO 3.4 दिलेल्या दोन समांतर रेषांमधील लंब अंतराची (perpendicular distance) गणना करणे.

TLO 3.5 सुलबसूत्रांमध्ये दिलेल्या भूमितीचा वापर करून दिलेल्या समस्या सोडविणे.

- **प्रस्तावना (Introduction):**

सरळ रेषा ही अभियांत्रिकी क्षेत्रातील सर्वाधिक वापरली जाणारी संकल्पना आहे. सरळ रेषांचे समीकरण आणि त्याच्याशी संबंधित भिन्न संकल्पना म्हणजे रेषाचा चढ़, रेषांमधील कोन हे दोन चलामधील (two variables) संबंध समजून घेण्यासाठी खूप आवश्यक आहेत.

- **सरळरेषा (Straight Line - स्ट्रेट लाइन) -**

सरळरेषा म्हणजे दोन बिंदूंमधील सर्वांत लहान लांबीचे अंतर, भूमिती मध्ये दोन चलातील (रेषीय) समीकरणे ही सरळ रेषा दर्शवण्यासाठी वापरतात.

- **रेषाचाचढ (Slope of a line - स्लोप ऑफ लाईन):**

रेषेने x- अक्षाच्या धन दिशेशी (positive X-axis) केलेल्या कोनाचे टॅन गुणोत्तर (tangent ratio) म्हणजे त्या रेषेचा चढ होय. जर θ (रेषेचा कल) हा कोनात्मक x- अक्षाच्या धन दिशेशी रेषाने बनलेला कोन असेल तर $tan\theta$ हा रेषेचा चढ असतो. रेषेच्या चढ ला प्रवणता (gradient) देखील म्हणतात आणि ते 'm' द्वारे दर्शविले जाते.

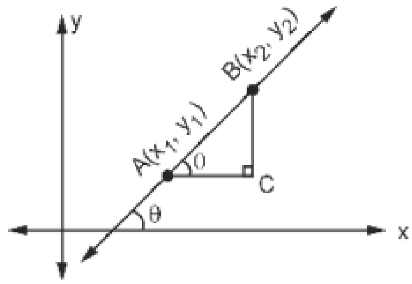
$$\therefore \quad m = tan\theta$$

उदाहरणार्थ: जर θ = 30°, तर रेषाचा चढ (Slope) = $tan30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ आहे.

➢ **दोन बिंदूमधून जात असलेल्या रेषेचा चढ** (Slope of a Line Passing through Two Points):

जर दिलेली रेषा दिलेल्या दोन बिंदू $A(x_1, y_1)$ आणि $B(x_2, y_2)$ मधून जात असेल तर

रेषेचा चढ (Slope) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



➢ **रेषेचे प्रमाण रुपातील समीकरण** (Standard Forms of Equations of Straight Lines):

1) चढ - बिंदूरुपातील रेषेचे समीकरण (Slope-point form – **स्लोप -पॉईंट फॉर्म**)

ज्या रेषेचा चढ 'm' आहे आणि ती रेषा $A(x_1, y_1)$ या बिंदूमधून जात असेल तर त्या रेषेचे समीकरण

$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

2) चढ - आंतर छेद रुपातील रेषेचे समीकरण (Slope-intercept form - **स्लोप-इंटरसेप्ट फॉर्म**):

ज्या रेषेचा चढ 'm' आणि y- आंतरछेद 'c' असेल तर त्या रेषेचे चढआंतर छेद रुपातील समीकरण

$$\boldsymbol{y = mx + c}$$

3) द्वि - आंतर छेद रुपातील रेषेचे समीकरण (Two-intercept form - **टू -इंटरसेप्ट फॉर्म**):

रेषेचा x - आंतरछेद 'a' आणि y-आंतरछेद 'b' असेल तर त्या रेषेचे समीकरण

$$\boldsymbol{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

4) दोन बिंदूच्या रुपातील रेषेचे समीकरण (Two point form - **टू पॉईंट फॉर्म**):

$A(x_1, y_1)$ आणि $B(x_2, y_2)$ या बिंदूमधून जाणाऱ्या रेषेचे समीकरण

$$\boldsymbol{\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}}$$

5) रेषेचे सामान्य समीकरण (General form - **जनरल फॉर्म**):

प्रत्येक समीकरण Ax + By + C = 0 या रुपात लिहिता येते. या समीकरणाला रेषेचे सामान्य समीकरण म्हणतात. येथे A, B आणि C ह्या वास्तविक संख्या आहेत व A आणि B एकाच वेळी शून्य नसतात.

आपण Ax + By + C = 0 या रेषेच्या समीकरणाला चढ आंतर छेद रुपात लिहिता येते.

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

चढ (Slope) = = $\frac{-A}{B}$,

x - आंतरछेद $(x - intercept) = \frac{-C}{A}$. आणि

y - आंतरछेद $(y - intercept) = \frac{-C}{B}$

सोडवलेली उदाहरणे

1) (-1,-2) आणि (-3, 8) या दोन बिंदूतून जाणाऱ्या रेषेचा चढ काढा.

उत्तर: समजा $A(x_1, y_1) = (-1,-2)$ आणि $B(x_2, y_2) = (-3,8)$

∴ रेषा AB चा चढ $= Slope\ of\ line\ AB,\ \ m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{8-(-2)}{-3-(-1)} = \frac{8+2}{-3+1} = \frac{10}{-2}$

∴ $\boldsymbol{m = -5}$

2) ज्या रेषेचा कल कोन **60° आहे त्या रेषेचा चढ काढा.**

उत्तर: दिलेले, रेषाचा कल (θ) = 60°

रेषाचा चढ़ = m = tan θ = tan 60°

∴ $\boldsymbol{m = \sqrt{3}}$

3) बिंदू (1, 7) मधून जाणारे व 2 हा चढ असणाऱ्या रेषेचे समीकरण लिहा.

उत्तरः दिलेले, चढ= m =2 आणि $(x_1, y_1) = (1,7)$

चढ - बिंदू रुपातील रेषेचे समीकरण

$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

∴ $y - 7 = 2(x - 1)$

∴ $y - 7 = 2x - 2$

∴ $\boldsymbol{2x - y + 5 = 0}$

4) $(3, 4)$ आणि $(4, 3)$ या बिंदूमधून जाणारी रेषेचे समीकरण लिहा.

उत्तर: दिलेले, $(x_1, y_1) = (3,4)$ आणि $(x_2, y_2) = (4,3)$

दोन बिंदूच्या रुपातील रेषेचे समीकरण (Two point form)

$$\boldsymbol{\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}}$$

$\therefore \quad \dfrac{y-4}{4-3} = \dfrac{x-3}{3-4}$

$\therefore \quad \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{x-3}{-1}$

$\therefore \quad -1(y-4) = 1(x-3)$

$\therefore \quad x + y - 7 = 0$

5) रेषेचा x- आंतरछेद 3 आणि y- आंतरछेद 4 दिलेले आहेत त्यावरून त्या रेषेचे समीकरण लिहा.

उत्तर: दिलेले, x- आंतरछेद (x-intercept) = a = 3

y- आंतरछेद (y-intercept) = b = 4

द्वि-आंतर छेद रुपातील रेषेचे समीकरण

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

$\therefore \quad \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = 1$

$\therefore \quad 4x + 3y - 12 = 0$

6) दिलेल्या $3x - 4y + 5 = 0$ या रेषेचा चढ आणि आंतरछेद लिहा.

उत्तर : दिलेल्या सरळ रेषेचे समीकरण $3x - 4y + 5 = 0$

या सोबत तुलना करा $Ax + By + C = 0$

$\therefore \quad A = 3, \quad B = -4, \quad C = 5$

चढ$= Slope\ of\ a\ line,\ m = \frac{-A}{B} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

x- आंतरछेद $= x - intercept = \frac{-C}{A} = \frac{-5}{3} = -\frac{5}{3}$

y - आंतरछेद $= y - intercept = \frac{-C}{B} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$

सराव प्रश्न संच

1) खाली दिलेल्या बिंदूमधून जाणारी रेषांचा चढ काढा.

a) (3, 4) आणि (7,10) b) (3, 4) आणि (- 4, 6)

2) रेषांचा कल दिला आहे त्यावरून त्या रेषांचा चढ़ काढा.

a) 90° b) 60°

3) खाली दिलेल्या रेषांचा चढ आणि आंतरछेद काढा.

a) 5x-4y + 7 = 0 c) 3x-4y+5=0 c) $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=\frac{1}{4}$

4) बिंदू P मधून जाणारी व m हा चढ असणारे खालील रेषांचे समीकरण लिहा.

a) P(1.7) आणि m = 2 b) P(1,2). आणि m $=-\frac{3}{2}$

c) P(2,5). आणि m = $=-\frac{4}{5}$ d) P(4,-5). आणि m $=-\frac{2}{3}$

5) प्रत्येक रेषेवरील दोन बिंदू खाली दिले आहेत त्या रेषांची समीकरण लिहा.

a) (3.4) आणि (5.6) b) (1,-1) आणि (3,5)

c) (4.3) आणि (3,-5) d) (7.4) आणि (5.8)

>दोन सर ळ रेषांमधील कोन (Angle between Two Straight Line):

जर, पहिल्या रेषेचा चढ m_1 आणि दुसऱ्या रेषेचा चढ m_2 असेत तर दोन रेषांमधील कोन आहे

$$\theta = tan^{-1}\left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|$$

समांतर आणि लंबरेषांची अट (Condition for parallel and perpendicular Lines)

1) दोन समांतर रेषांची अट:

दोन समांतर रेषाचे चढ समान असतात महणजेच $m_1 = m_2$ आणि उलट देखील खरे आहे.

2) दोन लंबरेषांची अट:

जर चढ़ाचा गुणाकार -1 असेल तर रेषा लंब असतात म्हणजेव $m_1 \cdot m_2 = -1$ आणि उलट देखील खरे आहे

1) 3x - 2y + 4=0 आणि 2x - 3y - 7 = 0 दोन रेषांमधील लघुकोन (acute angle) काढा.

उत्तर: दिलेल्या रेखांचे समीकरणे

$$L_1 \ : \ 3x - 2y + 4 = 0$$

$$L_2 \ : \ 2x - 3y - 7 = 0$$

$$L_1 \text{ चा चढ} = m_1 = \frac{-A}{B} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$L_2 \text{ चा चढ} = m_2 = \frac{-A}{B} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

दिलेल्या दोन रेषामधीत लघुकोन $\boldsymbol{\theta}$ आहे तर

$$\boldsymbol{\theta = tan^{-1}\left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| = tan^{-1}\left|\frac{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{3}{2}\frac{2}{3}}\right| = tan^{-1}\left|\frac{\frac{9-4}{6}}{1+1}\right|}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\theta = tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)}$$

2) 3x - 4y = 420 आणि 4x + 3y = 420 या दोन रेषा मधील कोन काढा.

उत्तर: दिलेल्या रेषांचे समीकरण

$$L_1 \; : \; 3x - 4y - 420 = 0$$

$$L_2 \; : \; 4x + 3y - 420 = 0$$

$\boldsymbol{L_1}$ चा चढ $= \boldsymbol{m_1 = \frac{-A}{B} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}}$

$\boldsymbol{L_2}$ चा चढ $= \boldsymbol{m_2 = \frac{-A}{B} = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}}$

दिलेल्या दोन रेषामधीत लघुकोन $\boldsymbol{\theta}$ आहे तर

$$\boldsymbol{\theta = tan^{-1}\left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| = tan^{-1}\left|\frac{\frac{3}{4} - \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)}\right| = tan^{-1}\left|\frac{\frac{9+16}{6}}{0}\right|}$$

$$\therefore \quad \theta = tan^{-1}(\infty) = 90^0 \text{ किंवा } \frac{\pi}{2}$$

∴ दिलेल्या रेषा एकमेकांना लंब आहेत. (The given lines are perpendicular to each other)

3) सिद्ध करा की 2x + 3y - 5 = 0 आणि 4x + 6y - 1 = 0 या दोन समांतर रेषा आहेत.

उत्तर: समजा $L_1 \; : \; 2x + 3y - 5 = 0 \quad L_2 \; : \; 4x + 6y - 1 = 0$

$\boldsymbol{L_1}$ चा चढ $= \boldsymbol{m_1 = \frac{-A}{B} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}}$

$\boldsymbol{L_2}$ चा चढ $= \boldsymbol{m_2 = \frac{-A}{B} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}}$

$$\therefore \quad \boldsymbol{m_1 = m_2}$$

∴ दिलेल्या दोन समांतर रेषा आहेत.

4) सिद्ध करा की 3x + 4y + 7 = 0 आणि 28x - 21y + 50 = 0 या दोन रेषा एकमेकांना लंब आहेत.

उत्तर: समजा $L_1 \; : \; 3x + 4y + 7 = 0 \qquad L_2 \; : \; 28x - 21y + 50 = 0$

$\boldsymbol{L_1}$ चा चढ $= \boldsymbol{m_1 = \frac{-A}{B} == \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}}$

L_2 चा चढ $= m_2 = \frac{-A}{B} = \frac{-28}{-21} = \frac{4}{3}$

$$\therefore \quad m_1 \times m_2 = -\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = -1$$

∴ दिलेल्या दोन रेषा एकमेकांना लंब आहेत.

5) (2.-3) या बिंदूतून जाणारी आणि 4x – y + 7 = 0 या रेषेला समांतर असणाऱ्या रेषेचे समीकरण तयार करा.

उत्तरः दिलेली रेषा 4x-y+7=0

रेषेचा चढ़ $= m = \frac{-A}{B} == \frac{-4}{-1} = 4$

ज्या रेषेचे समीकरण काढायचे आहे ती रेषा 4x-y+ 7 = 0 या रेषेला समांतर आहे

रेषेचा चढ़ = m =4 आणि (2,-3) हा बिंदू त्या रेषेवर आहे

चढ - बिंदू रुपातील रेषेचे समीकरण (Slope intercept form):

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$\therefore \quad y - (-3) = 4(x - 2)$

$\therefore \quad y + 3 = 4x - 8$

$\therefore \quad 4x - y - 11 = 0$

7) **(4,5) या बिंदूतून जाणारी आणि 7x - 5y - 420 = 0 या रेषेला संब असणाऱ्या रेषेचे समीकरण तयार करा.**

उत्तरः दिलेली रेषा 7x - 5y - 420 = 0

रेषेचा चढ़ $= m = \frac{-A}{B} == \frac{-7}{-5} = \frac{7}{5}$

ज्या रेषेचे समीकरण काढायचे आहे ती रेषा 7x - 5y – 420 = 0 या रेषेला लंब आहे

रेषेचा चढ़ = m =$-\frac{5}{7}$ आणि (4,5) हा बिंदू त्या रेषेवर आहे

चढ - बिंदू रुपातील रेषेचे समीकरण (Slope intercept form):

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$\therefore \quad y - 5 = -\frac{5}{7}(x - 4)$

$\therefore \quad 7y - 35 = -5x + 20$

$\therefore \quad 5x + 7y - 55 = 0$ हे अपेक्षित समीकरण आहे

सराव प्रश्न संच

1) सिद्ध करा की खाली दिलेल्या दोन रेषा समांतर रेषा आहेत.

a) $3x + y - 1 = 0$, $21x + 7y - 2 = 0$

b) $2x + 3y + 7 = 0$, $4x + 6y + 2 = 0$

c) $7x = 6 - 3y$, $14x = 7 - 6y$

d) $5x + 4y - 4 = 0$, $15x + 12y + 10 = 0$

e) $x + y - 2 = 0$, $7x + 7y = 10$

2) सिद्ध करा की खाली दिलेल्या दोनरेषा लंबरेषा आहेत

a) $5x + 6y - 10 = 0$, $6x - 5y + 3 = 0$

b) $2x + 3y = 5$. $2x - 3y = 6$

3) सरळ रेषेचे समीकरण तयार करा

a) (2, 3) या बिंदूतून जाणारी आणि $2x + 5y - 1 = 0$ या रेषेला समांतर असणारी.

b) (5, -6) या बिंदूतून जाणारी आणि $3x - 2y + 5 = 0$ या रेषेला समांतर असणारी.

c) (4, 5) या बिंदूतून जाणारी आणि $2x - 3y + 5 = 0$ या रेषेला समांतर असणारी.

d) (3, -1) या बिंदूतून जाणारी आणि $x + 2y - 4 = 0$ या रेषेला समांतर असणारी.

e) (-4, 2) या बिंदूतून जाणारी आणि $x - 3y - 12 = 0$ या रेषेला समांतर असणारी.

4) सरळ रेषेचे समीकरण तयार करा.

a) (3,4) या बिंदूतून जाणारी आणि $3x + 2y + 5 = 0$ या रेषेला लंब असणारी.

b) (2.0) या बिंदूतून जाणारी आणि $x + y + 3 = 0$ या रेषेला लंब असणारी.

c) (4.-5) या बिंदूतून जाणारी आणि $3x + 4y + 5 = 0$ या रेषेला लंब असणारी.

d) (4.5) या बिंदूतून जाणारी आणि $3x + 5y - 20 = 0$ या रेषेला लंब असणारी,

e) (3,-4) या बिंदूतून जाणारी आणि $5x - 2y + 3 = 0$ या रेषेला लंब असणारी.

5) दोन रेषांमधील लघुकोन शोधा.

a) $y = 5x + 6$ आणि $y = x$

b) $2y + x = 1$ आणि $x + 3y = 6$

c) 2x + 3y + 5 = 0 आणि x - 2y - 4 = 0

d) x + 3y + 5=0 आणि x - 2y - 4 = 0

e) x - 2y + 5 = 0 आणि 7x + y – 10 = 0

f) 2x + 3y = 13 आणि 2x - 5y + 7 = 0

बिंदूचे रेषे पासूनचे लंब अंतर (Perpendicular Distance of a point from a line):

बिंदू $\boldsymbol{P(x_1, y_1)}$ पासून रेषा Ax + By + C = 0 चे लंब अंतर (P) असेल तर

$$\boldsymbol{P = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|}$$

सोडवलेली उदाहरणे

1) बिंदू (3,4) पासून रेषा $\boldsymbol{3x + 4y - 5 = 0}$ चे लंब अंतर काढा.

उत्तरः दिलेली रेषा $3x + 4y - 5 = 0$ आणि बिंदू $(x_1, y_1) = (3,4)$

येथे $A = 3,\quad B = 4,\quad C = -5,\quad x_1 = 3,\quad y_1 = 4$

$\boldsymbol{P(x_1, y_1)}$ पासून रेषा Ax + By + C = 0 चे लंब अंतर

$$\boldsymbol{P = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| = \left|\frac{(3)(3) + (4)(4) + (-5)}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right| = \left|\frac{9 + 16 - 5}{\sqrt{9 + 16}}\right| = \left|\frac{20}{5}\right|}$$

$$\boldsymbol{\therefore P = 4\ \ units}$$

2) बिंदू (-3,-4) पासून रेषा 4(x + 2) = 3 (y - 4) चे लंब अंतर काढा.

उत्तर दिलेली रेषा 4(x+2) = 3 (y - 4)

4x + 8 = 3y - 12

4x - 3y + 20 = 0 आणि बिंदू $(x_1, y_1) = (-3, -4)$

$\boldsymbol{P(x_1, y_1)}$ पासून रेषा Ax + By + C = 0 चे लंब अंतर

$$\boldsymbol{P = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| = \left|\frac{(4)(-3) - (3)(-4) + 20}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}\right| = \left|\frac{-12 + 12 + 20}{\sqrt{16 + 9}}\right| = \left|\frac{20}{5}\right|}$$

$$\boldsymbol{\therefore P = 4\ \ units}$$

सराव प्रश्न संच

प्रश्नः खाली दिलेल्या बिंदूपासूनचे रेषाचे लंब अंतर काढा.

a) बिंदू (3, 4) रेषा 3x + 4y = 7

b) बिंदू (3, -2) रेषा 4x – 6y -5 = 0

c) बिंदू (5, 4) रेषा 2x + y + 6 = 0

दोन समांतर रेषांमधील लंब अंतर (Perpendiculer Distance between Two Parallel Lines) :

दोन समांतर रेषा $ax + by + c_1 = 0$ आणि $ax + by + c_2 = 0$ यामधील अंतर d असेल तर

$$d = \left|\frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

सोडवलेली उदाहरणे

1) दोन समांतर रेषा 3x-y+7=0 आणि 3x - y+ 16=0 यामधील अंतर काढा.

उत्तरः दिलेल्या रेषा 3x-y+7=0 आणि 3x - y+ 16=0

येथे $a = 3, \quad b = -1, \qquad c_1 = 7, \qquad c_2 = 16$

दोन समांतर रेषांमधील लंब अंतर

$$d = \left|\frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\frac{\mathbf{7 - 16}}{\sqrt{\mathbf{3^2 + (-1)^2}}}\right| = \left|\frac{\mathbf{-9}}{\sqrt{\mathbf{9+1}}}\right| = \left|\frac{\mathbf{-9}}{\sqrt{\mathbf{10}}}\right|$$

$$\boldsymbol{d = \frac{9}{\sqrt{10}} \quad units}$$

2) दोन समांतर रेषा 3x + 4y +5=0 आणि 6x + 8y = 25 यामधील अंतर काढा.

उत्तरः दिलेल्या रेषा 3x + 4y +5=0 आणि 6x + 8y = 25

$\therefore$ 6x + 8y + 10=0 आणि 6x + 8y -25 = 0

$\therefore \quad a = 6, \quad b = 8, \qquad c_1 = 10, \qquad c_2 = -25$

दोन समांतर रेषांमधील लंब अंतर

$$d = \left|\frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\frac{\mathbf{10 - (-25)}}{\sqrt{\mathbf{6^2 + 8^2}}}\right| = \left|\frac{\mathbf{35}}{\sqrt{\mathbf{36 + 64}}}\right| = \left|\frac{\mathbf{35}}{\sqrt{\mathbf{100}}}\right| = \left|\frac{\mathbf{35}}{\mathbf{10}}\right|$$

$$\boldsymbol{d = \frac{7}{2} \quad units}$$

सराव प्रश्न संच

प्रश्नः खाली दिलेल्या दोन समांतर रेषांमधील लंब अंतर काढा.

a) $5x - 12y + 1 = 0$ आणि $10x - 24y - 1 = 0$

b) $3x + 2y - 6 = 0$ आणि $3x + 2y - 12 = 0$.

c) $4x - 3y + 2 = 0$ आणि $4x + 3y - 9 = 0$.

d) $5x - 12y + 1 = 0$ आणि $10x - 24y - 1 = 0$

घटक ४ (Unit – IV)

विकलन शास्त्र (Differential Calculus - डिफरंशियल कॅल्कुलस)

४.१ फल आणि सीमा : फलाची संकल्पना आणि सोपी उदाहरणे (Functions and Limits:Concept of function and simple examples)

४.२ फल आणि सीमा : उदाहरणाशिवाय सीमा संकल्पना (Functions and Limits: Concept of limits without examples).

४.३ विकलज (Derivatives): विकलज चे नियम जसे की फलाची बेरीज ,गुणाकार , भागाकार (Rules of derivatives such as sum, product, quotient of functions).

४.४ विकलज (Derivatives): विकलज चे संयुक्त फल (मिश्र सूत्र),अंतर्निहित फल आणि प्रचलीय फल (Derivatives of composite functions(chain Rule),implicite and parametric functions.)

४.५ विकलज (Derivatives): व्यस्त, लागीय आणि घातांकीय फलाचे विकलज .(Derivatives of inverse, logarithmic and exponential functions.)

४.६ विकलज चे अभियोजन (Application of derivative):उदाहरणाशिवाय विकलज चा दुसरा क्रम,स्पर्शिका आणि अभिलंब समीकरण , महत्तमे आणि लघुत्तमे , वक्रता त्रिज्या (Second order derivative without examples, Equation of tangent and normal, Maxima and minima, Radius of curvature)

४.७ भारतीय ज्ञान प्रणाली नुसार गणन पद्धती : गणन पद्धती व भारतीय खगोलशास्त्रज्ञ (भारतीय गणित) (Calculus in Indian Knowledge System : The Discovery of Calculus by Indian Astronomers. (Indian Mathematics).

घटक ४ (Unit – IV)

विकलन शास्त्र (Differential Calculus - डिफरंशियल कॅल्कुलस)

विषय निष्पत्ती (Course Outcome):- अभियांत्रिकी प्रश्नांचे निराकरण करण्यासाठी मूलभूत गणिताचा वापर करून अभियांत्रिकी समस्या ओळखणे आणि विश्लेषण करणे

अध्ययन निष्पत्ती

४.१ फलाच्या आधारे दिलेल्या सोप्या समस्यांचे निराकरण करणे
४.२ विकलजच्या नियमांवर आधारित दिलेल्या सोप्या समस्यांचे निराकरण करणे
४.३ संयुक्त , अंतर्निहित , प्रचलीय, व्यस्त, लागीय आणि घातांकीय फलांचे विकलन करणे
४.४ स्पर्शिका आणि प्रलंबित यांचे समीकरण शोधण्यासाठी विकलन संकल्पना वापरणे
४.५ दिलेल्या फलासाठी महत्तम आणि लघुत्तम आणि वक्रतेची त्रिज्या मोजण्यासाठी विकलन संकल्पना वापरणे
४.६ भारतीय ज्ञान प्रणाली नुसार गणन पद्धती या संकल्पनेचा परिचय करणे

परिचय (Introduction)

गणितामध्ये कलन ही एक शाखा आहे .गणित आणि अभियांत्रिकी विज्ञानात संकलनची महत्त्वपूर्ण भूमिका आहे ही शाखा संकलनचे आणि विकलजचे भिन्न गुणधर्म शोधण्याचे काम करते कलन म्हणजे एखाद्या फलाचे सतत बदल किंवा फलातील दर बदलण्याचा अभ्यास. यात दोन प्रमुख भाग म्हणजे विकलन आणि संकलन असे आहेत. मुख्यतः याचा उपयोग अनियमित आकृत्यांची क्षेत्रफळे आणि घनफळे शोधण्यासाठी केला जातो. संकलन अभियांत्रिकी आणि भौतिक विज्ञान संबंधित गणिताच्या समस्येचे निराकरण करण्यासाठी कौशल्य विकसित करण्यासाठी वैज्ञानिक समस्यांचं मूलभूत संकल्पना एकत्र करते. थोडक्यात ,विकलन ही एक अशी पद्धती आहे जी दुसऱ्या राशीच्या अनुषंगाने एका राशीच्या बदलण्याच्या दराला संबोधित करते. येथे आपण तीन लेख खालील प्रमाणे अभ्यासणार आहोत

फल आणि सीमा (Functions and Limits)
विकलज (Derivatives)
विकलज चे अभियोजन (Application of derivative)

४.१ फल आणि सीमा (Functions and Limits)

काही मूलभूत व्याख्या

- **स्थिरांक (Constant - कॉन्स्टन्ट)** :- गणितीय राशीचे मूल्य जेव्हा निश्चित असते त्याला स्थिरांक म्हणतात स्थिरांकचे दोन प्रकार खालील प्रमाणे आहेत

  अ) केवळ स्थिरांक (Absolute constant) :- एक स्थिरांक ज्यांचे मूल्य कोणत्याही प्रयोगात निश्चित राहते म्हणजेच बदलत नाही त्याला केवळ स्थिरांक म्हणतात

  उदाहरणार्थ :- π, e, **g** etc.

ब)अविहित स्थिरांक (Arbitrary constant) :- एक स्थिरांक ज्यांचे मूल्य विशिष्ट प्रयोगासाठी निश्चित केले जाते आणि जसे प्रयोग बदलतात तसे त्याचे मूल्य बदलते त्याला अविहित स्थिरांक म्हणतात

उदाहरणार्थ :-

$y = ax + b$ ही एक बैजिक राशी आहे a आणि b हे स्थिर आहेत आपण a आणि b ला वेगवेगळी मूल्ये गृहीत धरू शकतो.

- **चल (Variable - व्हेरिएबल)** :-

  ज्या गणितीय राशींचे राशीचे मूल्य निश्चित केलेले नसते त्याला चल म्हणतात

  आपण चलला विविध मूल्य देऊ शकतो

  चल हे दोन प्रकारचे असतात

  अ) परचल (Dependent variable) :- एक चल ज्यांचे मूल्य इतर चलने ठरविले जाते त्याला परचल म्हणतात.

  ब) स्वचल (Independent variable) :- जे चल स्वतःला कोणतेही मूल्य घेण्यास स्वतंत्र आहे याला स्वचल म्हणतात.

  उदाहरणार्थ :- $y = x^8 + 3x^5 – 23$

  वरील उदाहरणात x स्वतःचे कोणतेही मूल्य घेण्यास मुक्त आहे परंतु y कोणतेही मूल्य घेण्यास मुक्त नाही. y चे मूल्य केवळ x द्वारे निश्चित केले जाते म्हणून , x हा स्वचल आहे आणि y अवलंबून आहे म्हणून परचल आहे.

- **फल (Function - फंक्शन)**:- परचल आणि स्वचल यातील संबंधाला फल म्हणतात

  उदाहरणार्थः- $y = x^8 + 3x^5 - 23$

  फल हे f,g,F,G इत्यादी अक्षरांद्वारे दर्शविले जाते म्हणजेच $y = f(x)$, y हे x चे फल.

- **फल चे प्रकार (Types of Functions)**:-

  बैजिक फल आणि अबैजिक फलक अशी दोन प्रकारची फल आहे

- **बैजिक फल(Algebraic Functions)**:- ज्या फलमध्ये स्थिरांक आणि चल हे बैजिक चिन्हांचा वापर करून जोडले जातात त्याला बैजिक फल म्हणतात.

  बैजिक फल चे प्रकार खालील प्रमाणे आहेत.

  अ) व्यक्त फल (Explicit Function):-जेव्हा परचल व स्वचल दोन्ही स्वतंत्रपणे मांडले जातात तेव्हा त्या फलला व्यक्त फल म्हणतात म्हणजेच $y = f(x)$

  उदाहरणार्थः- $y = 3x^4 – 6x^2 + x + 8$

  ब) अव्यक्त फल (Implicit Function):-जेव्हा परचल आणि स्वचल दोन्ही चल एकत्रितपणे मांडले जातात आणि आपण त्यांना वेगळे करू शकत नाही तेव्हा त्या फलला अव्यक्त फल म्हणतात. म्हणजेच $f(x, y) = 0$

  उदाहरणार्थः- $x + xy + y^2 = 0$

  क) गठित फल (Composite Function):-फल च्या फल ला गठीत फल असे म्हणतात.

  म्हणजेच $y = f(u)$ आणि $u = g(x)$ तर $y = h(x) = f[g(x)]$

  उदाहरणार्थः- $y = 4u^3 - 8u^2 + 3u$ जेव्हा $u = x^2 - 5$

  तर $y = 4(x^2 – 5)^3 – 8(x^2 – 5)^2 + 3(x^2 – 5)$

- **अबैजिक फल (Transcendental Functions):-** बैजिक फल व्यतिरिक्त इतर जे फल असते त्याला अबैजिक फल असे म्हणतात अबैजिक फल चे प्रकार खालील प्रमाणे आहेत.

  अ) त्रिकोणमितीय / वृत्तीय फल (Trigonometric / Circular Functions):- ज्या फल मध्ये त्रिकोणमितीय / वृत्तीय फल उपस्थित असते त्याला त्रिकोणमितीय / वृत्तीय फल असे म्हणतात.

  उदाहरणार्थ:- $y = 5\cos x + 3\sin^2 x - 4$

  ब) व्यस्त त्रिकोणमितीय फल (Inverse Trigonometric Functions):- ज्या फल मध्ये व्यस्त त्रिकोणमितीय फल उपस्थित असते त्याला व्यस्त त्रिकोणमितीय फल असे म्हणतात.

  उदाहरणार्थ :- $y = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$

  क) घात फल (Exponential Functions):- ज्या फल मध्ये घातांक उपस्थित असतात त्याला घात फल असे म्हणतात.

  उदाहरणार्थ:- $y = e^{7x} + 3e^{-4x} - 3^{4x}$

  ड) लॉगॅरिथमिक फल (Logarithmic Functions):- ज्या फल मध्ये लॉगॅरिथम उपस्थित असते त्याला लॉगॅरिथमिक फल असे म्हणतात.

  उदाहरणार्थ:- $y = \log_3(2x + 5) - \log_7 32$

- **इतर फल (Other Functions):-**

  अ) प्राचली फल (Parametric Function) :- जेव्हा परचल आणि स्वचल दोन्ही चल इतर प्राचल मध्ये मांडले जातात त्याला प्राचली फल असे म्हणतात.

  म्हणजेच $x = f(t)$ आणि $y = g(t)$

  ब) सम फल आणि विषम फल (Even and Odd Function):-

  समजा $f(x)$ हे एक x चे फल आहे आणि

  जर $f(-x) = f(x)$ तर त्या फल ला सम फल असे म्हणतात.

  जर $f(-x) = -f(x)$ तर त्या फल ला विषम फल असे म्हणतात .

  $\sin x$ आणि $\tan x$ हे विषम फल आहेत परंतु $\cos x$ हे सम फल आहे.

  क) आवर्तनी फल (Periodic Function):-

  $f(x)$ हे फल आवर्तनी फल म्हटले जाते, जेव्हा $f(x + p) = f(x)$.

  उदाहरणार्थ:- $\sin x$ हे 2π सह आवर्तनी फल आहे.

  ज्याअर्थी $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

  त्याचप्रमाणे, $\cos x$ हे 2π आणि $\tan x$ हे π याचे आवर्तनी फल आहेत.

सोडवलेले उदाहरण

1.जर $f(x) = x^3 + x^2 - 2$ तर $f(1) - f(2)$ याची किंमत काढा

उत्तर:- दिलेले $f(x) = x^3 + x^2 - 2$

किंमत $x = 1$ टाकून

$f(1) = (1)^3 + (1)^2 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$

$\Rightarrow f(1) = 0$

किंमत $x = 2$ टाकून

$f(2) = (2)^3 + (2)^2 - 2 = 8 + 4 - 2 = 10$

$\Rightarrow f(2) = 10$

आता

$f(1) - f(2) = 0 - 10 = -10$

$f(1) - f(2) = -10$ मिळालेले उत्तर

सरावासाठी प्रश्न

1. जर $f(x) = x^2 + 2x - 5$ तर $f(0) - f(-1)$ याची किंमत काढा
2. जर $f(x) = x^2 + 6x + 10$ तर $f(2) + f(-2)$ याची किंमत काढा
3. जर $f(x) = x^4 - 2x + 7$ तर $f(0) + f(2)$ याची किंमत काढा
4. जर $f(x) = \frac{x^2+9}{\sqrt{x-3}}$ तर $f(4) + f(7)$ याची किंमत काढा
5. जर $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ तर $f(0) + f(3)$ याची किंमत काढा

सोडवलेले उदाहरण

1. जर $f(x) = \log(\sin x)$ तर $f(\pi/2)$ याची किंमत काढा

उत्तर:- दिलेले $f(x) = \log(\sin x)$

किंमत $x = \pi/2$ टाकून

$f(\pi/2) = \log[\sin(\pi/2)]$

$\Rightarrow f(\pi/2) = \log[1]$

$\Rightarrow f(\pi/2) = 0$ मिळालेले उत्तर

सरावासाठी प्रश्न

1. जर $f(x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$ तर $f(\pi/6)$ याची किंमत काढा [उत्तर:- 0]
2. जर $f(x) = \sin x + \log(\cos x)$ तर $f(0)$ याची किंमत काढा [उत्तर:- 0]
3. जर $f(x) = \log(\cos x)$ तर $f(0)$ याची किंमत काढा [उत्तर:- 0]

सोडवलेले उदाहरण

1.जर $f(x) = 2^x - \log_2 x$ तर $f(2)$ याची किंमत काढा

उत्तर:- दिलेले $f(x) = 2^x - \log_2 x$

किंमत $x = 2$ टाकून

$f(2) = = 2^2 - \log_2 2$

$\Rightarrow f(2) = 4 - [1]$

$\Rightarrow f(2) = 3$ मिळालेले उत्तर

सरावासाठी प्रश्न

1.जर $f(x) = 64^x + \log_3 x$ तर $f(1/3)$ याची किंमत काढा
2.जर $f(x) = 25^x + \log_2 x$ तर $f(½)$ याची किंमत काढा
3.जर $f(x) = 16^x - \log_2 x$ तर $f(½)$ याची किंमत काढा
4.जर $f(x) = 9^x + \log_2 x$ तर $f(1)$, $f(2)$ आणि $f(4)$ याची किंमत काढा

सोडवलेले उदाहरण

1.जर $f(x) = ax + 10$ आणि $f(1) = 13$ तर ' a ' ची किंमत काढा

उत्तर:- दिलेले $f(x) = ax + 10$ आणि $f(1) = 13$

आता

$f(x) = ax + 10$

किंमत x = 1 टाकून

$f(1) = a(1) + 10$ आणि $f(1) = 13$

⇨ $a(1) + 10 = 13$

⇨ $a = 13 - 10$

⇨ $a = 3$ मिळालेले उत्तर

सरावासाठी प्रश्न

1.जर $f(x) = ax + 5$ आणि $f(1) = 8$ तर ' a ' ची किंमत काढा.
2.जर $f(x) = 3x + a$ आणि $f(1) = 7$ तर ' a ' ची किंमत काढा.

सोडवलेले उदाहरण

1. $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ हे सम फल की विषम फल आहे ते सांगा

उत्तर:- दिलेले $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$............(i)

किंमत x = – x टाकून

$f(-x) = \frac{e^{(-x)}+e^{-(-x)}}{2}$

⇨ $f(-x) = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2}$

⇨ $f(-x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$

⇨ $f(-x)= f(x)$ समीकरण (i) वरून

⇨ f(x) हे सम फल आहे.

सरावासाठी प्रश्न

1. $f(x) = \frac{a^x+a^{-x}}{2}$ हे सम फल की विषम फल आहे ते सांगा
2. $f(x) = x^4 + 2x^2 + \cos x$ हे सम फल की विषम फल आहे ते सांगा
3. $f(x) = \frac{3^x+3^{-x}}{2}$ हे सम फल की विषम फल आहे ते सांगा

सोडवलेले उदाहरण

1. $f(x) = x^3 - 3x + \sin x + x \cos x$ हे विषम फल आहे का ?

उत्तर:- दिलेले $f(x) = x^3 - 3x + \sin x + x \cos x$ ....(i)

किंमत $x = - x$ टाकून

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + \sin(-x) + (-x)\cos(-x)$

$\Rightarrow f(-x) = -x^3 + 3x - \sin x - x \cos x$

$\Rightarrow f(-x) = -[x^3 - 3x + \sin x + x \cos x]$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x)$ समीकरण (i) वरून

$\Rightarrow f(x)$ हे विषम फल आहे

सरावासाठी प्रश्न

1. $f(x) = x^3 + 3\sin x + x$ हे सम फल की विषम फल आहे ते सांगा
2. $f(x) = x^3 - 3x + \sin x + x \cos x$ हे सम फल की विषम फल आहे ते सांगा
3. जर $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ तर $f(0) + f(3) = 10$ दाखवा
4. जर $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$ तर $f(-1) = 3 f(1)$ दाखवा
5. जर $f(x) = \sin x$ तर $f(3x) = 3 f(x) - 4 f^3(x)$ दाखवा
6. जर $f(x) = 3x^4 + x^2 + 5 - 3\cos x + 2\sin^2 x$ तर $f(x) + f(-x) = 2 f(x)$ दाखवा
7. जर $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ तर i) $f(x+y) = f(x)\, g(y) + f(y)\, g(x)$

   ii) $g(m - n) = g(m)\, g(n) + f(m)\, f(n)$ दाखवा
8. जर $f(x) = \log x$, $g(x) = x^3$ तर $f[g(x)] = 3 f(x)$ दाखवा
9. जर $f(x) = \cos x$ तर $f(3x) = 4 f^3(x) - 3 f(x)$ दाखवा
10. जर $f(x) = a^x$ तर $f(m + n) = f(m). f(n)$ दाखवा
11. जर $f(x) = ax^2 + bx + 3$ आणि $f(1) = 4$, $f(2) = 11$ तर ' a 'आणि 'b' ची किंमत काढा
12. जर $f(x) = x^2 - 2x + 5$ आणि $t = y - 2$ तर $f(t)$ ची किंमत काढा

४.२ फल आणि सीमा : उदाहरणाशिवाय सीमा संकल्पना (Functions and Limits: Concept of limits without examples).

- **उदाहरणाशिवाय सीमा संकल्पना (Functions and Limits: Concept of limits without examples).**
  जसे x चे मूल्य 'a' असते त्या वेळेस फल f (x) चे सीमा मूल्य ' l ' असे म्हणतात
  जेव्हा सर्व $\in > 0$, तेव्हा $\boldsymbol{\delta} > 0$ अस्तित्वात अशा प्रकारे येतात की,
  जेव्हा $| f(x) - l | < \in$ तेव्हा $| x - a | < \boldsymbol{\delta}$ आणि त्यास $\lim_{x \to a} f(x) = l$ अशा प्रकारे संबोधित करतात

४.३ विकलज (Derivatives – डेरीवेटीव्हज)

फल y = f (x) चे विकलच x च्या संदर्भात $\frac{dy}{dx}$ or $\frac{d}{dx}[y]$ or $\frac{d}{dx}[f(x)]$or f'(x) or D f(x) द्वारे दर्शविले जाते

आणि $\lim_{h \to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$अस्तित्वात आले तर त्याला y चे x च्या संदर्भात विकलज असे म्हणतात

$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$ इथे h ही x मधील वाढ आहे .

- **मानक फलचे विकलज (Derivative of standard Functions) :**
  A) बैजिक फलचे विकलज (Derivative of Algebraic Function):

1) $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

2) $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3) $\frac{d}{dx}(x) = 1$

4) $\frac{d}{dx}(k) = 0$; k हा स्थिरांक आहे

B) लागीय आणि घात फलचे विकलज (Derivative of Logarithmic and Exponential Functions):-

1) $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x.\log a}$ e.g. $\frac{d}{dx}(\log_2 x) = \frac{1}{x.\log 2}$

2) $\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$

3) $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x.\log\ a$ e .g. $\frac{d}{dx}(3^x) = 3^x.\log\ 3$

4) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

C) त्रिकोणमितीय / वृत्तीय फलचे विकलज (Derivative of Trigonometric / Circular Functions):-

1) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

2) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

3) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

4) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\cos ec^2 x$

5) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x.\tan x$

6) $\frac{d}{dx}(\cos ecx) = -\cos ecx.\cot x$

D)व्यस्त त्रिकोणमितीचे फलचे विकलज (Derivative of Inverse Trigonometric Function) :-

1) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2) $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$

4) $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{-1}{1+x^2}$

5) $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

6) $\frac{d}{dx}(\cos ec^{-1} x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

- **विकलचे नियम** (**Rule for Differentiation):-**

1. बेरीज किंवा फरक चे विकलज (Sum/Difference)

जर u आणि v हे x चे विकलक फल असतील आणि y = u±v तर

$$\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

2. गुणाकार नियम (Product Rule):-

जर u आणि v हे x चे विकलक फल असतील आणि y = u v तर

$$\frac{d}{dx}(u \times v) = u \times \frac{dv}{dx} \quad + \quad v \times \frac{du}{dx}$$

$\frac{d}{dx}(ku) = k\frac{du}{dx}$; k हा स्थिरांक आहे

3. भागाकार नियम (Quotient Rule):-

जर u आणि v हे x चे विकलक फल असतील आणि y = $\frac{u}{v}$ तर

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\times\frac{du}{dx} \quad - \quad u\times\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

सोडवलेली उदाहरणे

1. जर $y = 3^x + x^3 + 3^3 + \log_3 x$ तर $\frac{dy}{dx}$ ची किंमत काढा

उत्तर:- दिलेले $y = 3^x + x^3 + 3^3 + \log_3 x$

x च्या संदर्भात विकलन करू या

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3^x) + \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(3^3) + \frac{d}{dx}(\log_3 x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 3^x \log 3 + 3x^{3-1} + 0 + \frac{1}{x}$$

(3^3 हा स्थिरांक आहे)

$$\frac{dy}{dx} = 3^x \log 3 + 3x^2 + \frac{1}{x}$$

सरावासाठी प्रश्न

1. जर $y = x^{10} + 10^x + e^x$ तर $\frac{dy}{dx}$ ची किंमत काढा
2. जर $y = x^a + a^x + a^a$ तर $\frac{dy}{dx}$ ची किंमत काढा

सोडवलेली उदाहरणे

1. जर $y = x.sinx$ तर $\frac{dy}{dx}$ ची किंमत काढा

उत्तर:- दिलेले $y = x.sinx$

x च्या संदर्भात विकलन करू या

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{d}{dx}(\sin x) + \text{sinx}\frac{d}{dx}(\text{x})$$

$$\frac{dy}{dx} = x(\cos x) + \text{sinx}(1)$$

$$\frac{dy}{dx} = x.cosx + \text{sinx}$$

सरावासाठी प्रश्न

1. जर $y = e^{x}.\tan x$ तर $\frac{dy}{dx}$ ची किंमत काढा
2. जर $y = \sin x.\cos x$ तर $\frac{dy}{dx}$ ची किंमत काढा

सोडवलेली उदाहरणे

1. जर $y = \frac{\log x}{x}$ तर $\frac{dy}{dx}$ ची किंमत काढा

उत्तर:- दिलेले $y = \frac{\log x}{x}$

x च्या संदर्भात विकलन करू या

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\frac{d}{dx}(\log x) - \log x\frac{d}{dx}(x)}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(\frac{1}{x}) - \log x(1)}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

सरावासाठी प्रश्न

1. जर $y = \frac{\sin x}{x}$ तर $\frac{dy}{dx}$ ची किंमत काढा
2. जर $y = \frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$ तर $\frac{dy}{dx}$ ची किंमत काढा
3. जर $y = \frac{x+1}{x-1}$ तर $\frac{dy}{dx}$ ची किंमत काढा

४.४ गठित फलाचे विकलज [Derivative derivative of composite function (Chain Rule)]:-

गठित फल (**composite function)** च्या फल ला गठित फल असे म्हणतात.

म्हणजेच y = f (u) आणि u = g (x)

तर y = f [g (x)] = f (u)

श्रृंखला नियम (Chain Rule):-

जर y हे u चे विकलक फल असेल आणि u हे x चे विकलक फल असेल.

म्हणजेच y = f (u) आणि u = g (x)

तर $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$

सामान्यत: y = f (u) आणि u हे x चे फल आहे

तर $\frac{dy}{dx} = f'(u).\frac{du}{dx}$

सोडवलेली उदाहरणे

1. जर $y = \sin(3x + 5)$ तर $\frac{dy}{dx}$ ची किंमत काढा

उत्तर:- दिलेले $y = \sin(3x + 5)$

समजा u = 3x + 5 ∴ y = sin u

∴ $\frac{du}{dx} = 3$ आणि $\frac{dy}{du} = \cos u$

∴ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ ...... शृंखला नियम

∴ $\frac{dy}{dx} = \cos u \ .3$

∴ $\frac{dy}{dx} = 3\cos(3x + 5)$

हे कार्य आपणास त्रासदायक आहे असे वाटत असल्यास हे उदाहरण सोडवण्याचा आणखी एक मार्ग आहे तो पुढील प्रमाणे

दिलेले $y = \sin(3x + 5)$

x च्या संदर्भात विकलन करू या

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} sin(3x + 5)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos(3x + 5)\frac{d}{dx}(3x + 5)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos(3x + 5) \, .3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3\cos(3x + 5)$$

सरावासाठी प्रश्न

1. जर $y = \tan(4 - 3x)$ तर $\frac{dy}{dx}$ ची किंमत काढा
2. जर $y = 5^{\sqrt{x}}$ तर $\frac{dy}{dx}$ ची किंमत काढा
3. जर $y = \log(x.sin2x)$ तर $\frac{dy}{dx}$ ची किंमत काढा
4. जर $y = \log(secx + tanx)$ तर $\frac{dy}{dx}$ ची किंमत काढा

४. ५ अव्यक्त फलाचे विकलज (Derivative of Implicit Function):-

अव्यक्त फल (Implicit Function) :- जेव्हा परचल आणि स्वचल हे दोन्ही चल एकत्रितपणे मांडले जातात आणि आपण त्यांना वेगळे करू शकत नाही तेव्हा त्या फलला अव्यक्त फल म्हणतात

म्हणजेच f (x, y) = 0

उदाहरणार्थ $x^2 + y^2 + xy - y = 0$

आता आपण अव्यक्त फलाचे विकलच कसे काढायचे ते बघू या.

x च्या अनुषंगाने फलाचे विकलन करणे

x च्या अनुषंगाने विकलच मिळवण्यासाठी दिलेल्या फलात y च्या पदाचे y च्या

अनुषंगाने विकलं करणे आणि त्या y च्या विकलज ला $\frac{dy}{dx}$ ने गुणने.

$\frac{dy}{dx}$ असलेली पदे डाव्या बाजूला एकत्रित करणे आणि सोडून उरलेली पदे उजव्या

बाजूला एकत्रित करणे

ह्या प्रकारे $\frac{dy}{dx}$ मिळते.

सोडवलेली उदाहरणे

1. जर $x^2 + y^2 - xy = 0$ तर $\frac{dy}{dx}$ ची (1, – 2) या बिंदू वर किंमत काढा

उत्तर:- दिलेले $x^2 + y^2 - xy = 0$

x च्या संदर्भात विकलन करू या

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}(xy) = 0$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - [x.\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(x)] = 0$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - x.\frac{dy}{dx} - y(1) = 0$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - x.\frac{dy}{dx} - y = 0$$

$$(2x - y) + (2y - x)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2y - x)\frac{dy}{dx} = -(2x - y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(2x-y)}{(2y-x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-2x}{2y-x}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,-2\,)} = \frac{-2-2(1)}{2(-2)-1}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,-2\,)} = \frac{-4}{-5}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,-2\,)} = \frac{4}{5}$$

सरावासाठी प्रश्न

1. जर $2x^2 + 3y^2 - xy = 18$ तर $\frac{dy}{dx}$ ची किंमत काढा
2. जर $x^2 + 3xy + y^2 = 11$ तर $\frac{dy}{dx}$ ची (1,2) या बिंदू वर किंमत काढा

- **४. ६ प्राचली फलाचे विकलज (Derivative of Parametric Function):-**

प्राचली फल (**Parametric Function):-** जेव्हा परचल आणि स्वचल हे दोन्ही चल इतर प्राचल मध्ये मांडले जातात त्याला प्राचली फल असे म्हणतात.

जर x = f (t) आणि y = g (t) जेथे t हा प्राचल आहे

तर $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ इथे $\frac{dx}{dt} \neq 0$

सोडवलेली उदाहरणे

1. जर $x = a\,(\,\theta + \sin\theta)$ आणि $y = a\,(\,1 - \cos\theta)$तर $\frac{dy}{dx}$ ची जेव्हा $\theta = \frac{\pi}{2}$, यासाठी किंमत काढा.

उत्तर:- दिलेले $x = a\,(\,\theta + \sin\theta)$ आणि $y = a\,(\,1 - \cos\theta)$

x आणि y चे विकलन θ च्या संदर्भात करू या

$\frac{dx}{d\theta} = a(1 + cos\theta)$ आणि $\frac{dy}{d\theta} = a(0 + sin\theta)$

$\frac{dx}{d\theta} = a(1 + cos\theta)$ आणि $\frac{dy}{d\theta} = asin\theta$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{asin\theta}{a(1+cos\theta)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{asin\theta}{a(1+cos\theta)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\frac{dy}{dx} = tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

सरावासाठी प्रश्न

2. जर x = a sect आणि y = b tant तर $\frac{dy}{dx}$ ची जेव्हा $t = \pi/2$, यासाठी किंमत काढा.
3. जर x = a(cost + tsint)आणि $y = a(sint - tcost)$तर $\frac{dy}{dx}$ ची जेव्हा $t = \pi/4$, यासाठी किंमत काढा
4. जर $x = 3at^2$आणि $x = 2at^3$ तर $\frac{dy}{dx}$ ची जेव्हा $t = \pi/4$, यासाठी किंमत काढा

४. ७ व्यस्त त्रिकोणमितीय फलाचे विकलज (Derivative of Inverse Trigonometric Function):-

आपण यापूर्वी त्रिकोणमितीय आणि व्यस्त त्रिकोणमितीय सूत्रांचा अभ्यास केला आहे आत्ता आपण विचलनपूर्वी व्यस्त त्रिकोणमितीय सूत्रे प्रश्नांचे निराकरण करण्यासाठी वापरणार आहोत येथे आपण पायाभूत संलग्न आणि त्रिकोणमितीय सूत्रांचा वापर करणार आहोत जेणेकरून आपण आपले परिगनण कमी करू शकतो.

सोडवलेली उदाहरणे

1. जर $y = sin^{-1}(cosx)$ तर $\frac{dy}{dx}$ ची किंमत काढा

उत्तर:- दिलेले $y = sin^{-1}(cosx)$

$$y = sin^{-1}\{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\}$$

$$y = \frac{\pi}{2} - x$$

Diffferentiate w.r. to x

$$\frac{dy}{dx} = 0 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = -1$$

2. जर $y = tan[cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)]$ तर $\frac{dy}{dx}$ ची किंमत काढा

उत्तर:- दिलेले $y = tan[cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)]$

$$y = tan[tan^{-1}x]$$

$$y = x$$

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

सरावासाठी प्रश्न

1. जर $y = cos^{-1}(\sin x)$ तर $\frac{dy}{dx}$ ची किंमत काढा
2. जर $y = tan^{-1}(\cot x)$ तर $\frac{dy}{dx}$ ची किंमत काढा
3. जर $y = tan^{-1}(\frac{sinx}{1+cosx})$ तर $\frac{dy}{dx}$ ची किंमत काढा

४. ८ लॉगरिथमिक विकलन (Logarithmic differentiation):-

कधीकधी फल हे फलांच्या गुणाकार मध्ये मांडलेले असते किंवा $f(x)^{g(x)}$ च्या रूपात असतात. अशा फलसाठी प्रथम लॉगरिथम घ्या आणि नंतर विकलन घ्या. या विकलन पद्धतीस लॉगरिथमिक विकलन म्हटले जाते

सोडवलेली उदाहरणे

1. जर $y = x^x$ तर $\frac{dy}{dx}$ ची किंमत काढा

उत्तर:- दिलेले $y = x^x$

दोन्ही बाजूंचे लॉगरिथम घेऊ या

$$logy = logx^x$$

$$logy = x.logx$$

x च्या संदर्भात विकलन करूया

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = x.\frac{d}{dx}(logx) + logx\,.\frac{d}{dx}(x)$$

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{x} + logx\,.1$$

$$\frac{dy}{dx} = y(1 + logx)$$

$$\frac{dy}{dx} = x^x(1 + logx)$$

2. जर $y = (sinx)^{(logx)}$ तर $\frac{dy}{dx}$ ची किंमत काढा

उत्तर:- दिलेले $y = (sinx)^{(logx)}$

दोन्ही बाजूंचे लॉगरिथम घेऊ या

$$logy = log(sinx)^{(logx)}$$

$$logy = (logx).\log(sinx)$$

x च्या संदर्भात विकलन करूया

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = logx.\frac{d}{dx}log(sinx) + \log(sinx)\cdot\frac{d}{dx}(logx)$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = logx.\frac{1}{sinx}\frac{d}{dx}(sinx) + \log(sinx)\cdot\frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = y(logx.\frac{1}{sinx}(cosx) + \log(sinx)\cdot\frac{1}{x})$$

$$\frac{dy}{dx} = (sinx)^{(logx)}\ (logx.(cotx) + \log(sinx)\cdot\frac{1}{x})$$

सरावासाठी प्रश्न

1. जर $y = (sinx)^x$ तर $\frac{dy}{dx}$ ची किंमत काढा
2. जर $y = (tanx)^{(cotx)}$ तर $\frac{dy}{dx}$ ची किंमत काढा
3. जर $e^y = y^x$ तर सिद्ध करा $\frac{dy}{dx} = \frac{(logy)^2}{logy-1}$ ची किंमत काढा

४. ९ विकलज चे अभियोजन (Application of Derivative):- उदाहरणाशिवाय विकलजचा दुसरा क्रम (Second order derivative without examples):

समजा y = f (x) हे x चे फल आहे तर x च्या अनुषंगाने विकलन केल्यावर $\frac{dy}{dx}$ मिळते

$\frac{dy}{dx} = f'(x)$ ....(i) हे x च्या अनुषंगाने y च्या विकलजचा पहिला क्रम. समीकरण (i) चे पुन्हा विकलन केल्यावर

$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$ ....(ii) हे x च्या अनुषंगाने y च्या विकलजचा दुसरा क्रम.

समीकरण (ii) चे पुन्हा विकलन केल्यावर

$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x)$ हे x च्या अनुषंगाने y च्या विकलजचा तिसरा क्रम.

या पद्धतीने आपण विकलन प्रक्रिया चालू ठेवू शकतो $\frac{d^4y}{dx^4}, \frac{d^5y}{dx^5}$ ....

A) स्पर्शिका आणि अभिलंब समीकरण (Equation of Tangent and Normal)

स्पर्शिकेचा चढ (Slope of tangent):- कोणत्याही P (x_1 ,y_1) बिंदुसाठी, y = f (x) ह्या वक्राच्या स्पर्शिकेचा चढ हा m ने दाखविला जातो.

चढ = m = $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1\,,y_1)}$

तसेच P (x_1 ,y_1) बिंदूसाठी, y = f (x) या वक्राच्या स्पर्शिकेचे समीकरण

$y - y_1 = m\,(x - x_1)$ असे असते

अभिलंब हा स्पर्शिकेसाठी लंब असल्याने, अभिलंब चा चढ 'm' ने दाखविला जातो

आणि त्याचे सूत्र आहे

$\mathrm{m}' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1\,,y_1)}}$

तसेच P (x_1 ,y_1) बिंदूसाठी, y = f (x) या वक्राच्या अभिलंबचे समीकरण $y - y_1 = m'(x - x_1) = \frac{-1}{m}(x - x_1)$ असे असते

सोडवलेली उदाहरणे

1. $y = 2x - x^2$ ह्या वक्राच्या स्पर्शिकेचा आणि अभिलंबचा चढ , बिंदू (2 , 0) साठी किंमत काढा.

उत्तर:- दिलेले $y = 2x - x^2$ ...... (i)

$\frac{dy}{dx} = 2 - 2x$

चढ = m = $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1\,,y_1)}$

चढ = m = $(2 - 2x)_{(2\,,0)}$

चढ = m = $[2 - 2(2)]$

चढ = m =-2

आणि

अभिलंबचा चढ $= \mathrm{m}' = \frac{-1}{m}$

अभिलंबचा चढ $= \mathrm{m}' = \frac{-1}{-2}$

अभिलंबचा चढ $= \mathrm{m}' = \frac{1}{2}$

2. $x^2 + 3xy + y^2 = 5$ ह्या वक्राच्या स्पर्शिकेचे समीकरण आणि अभिलंबचे समीकरण , (1 , 1) या बिंदू साठी किंमत काढा.

उत्तर:- दिलेले $x^2 + 3xy + y^2 = 5$ ...... (i)

x च्या संदर्भात विकलन करू या

$2x + 3\left(x.\frac{dy}{dx} + y.1\right) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$

(1 , 1) या बिंदू साठी m किंमत

$2(1) + 3\big((1).(m) + (1).1\big) + 2(1)m = 0$
$2 + 3(m + 1) + 2m = 0$
$2 + 3m + 3 + 2m = 0$
$5m + 5 = 0$
$5m = -5$
$m = -1$
चढ = m = $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1\,,1)} = -1$
स्पर्शिकेचे समीकरण
$y - y_1 = m\,(x - x_1)$
$y - 1 = (-1)\,(x - 1)$
$y - 1 = -x + 1$
$x + y - 2 = 0$

तसेच
अभिलंबचे समीकरण
$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$
$y - 1 = \frac{-1}{-1}(x - 1)$
$y - 1 = x - 1$
$x - y = 0$

सरावासाठी प्रश्न

1. x = 2 ला $y = x^3 - 2x^2 + 4$ ह्या वक्राच्या स्पर्शिकेचे समीकरण आणि अभिलंबचे समीकरण काढा
2. (2, 0) या बिंदू साठी y = x (2 − x) ह्या वक्राच्या स्पर्शिकेचे समीकरण आणि अभिलंबचे समीकरण काढा
3. $y = x^2 - 2x - 3$ ह्या वक्राच्या स्पर्शिकेचे समीकरण काढा जेथे ते x - अक्षाला छेदते.

B) महत्तमे आणि लघुत्तमे (Maxima and Minima)

समजा y = f (x) हे x चे फल आहे

a) y = f (x) चे ह्या फलाचे मूल्य x = a साठी महत्तम असते जर

i) $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\mathrm{x=a}} = 0$ आणि

ii) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{\mathrm{x=a}} < 0$

आणि फलाचे महत्तम मूल्य ने $y_{\max} = f(a)$ मिळते

b) y = f (x) चे ह्या फलाचे मूल्य x = a साठी लघुत्तम असते जर

i) $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\mathrm{x=a}} = 0$ आणि

ii) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{\mathrm{x=a}} > 0$

आणि फलाचे लघुत्तम मूल्य ने $y_{\min} = f(a)$ मिळते

c) जर $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{\mathrm{x=a}} = 0$ तर त्या फलला लघुत्तम मूल्य किंवा महत्तम मूल्य नसते

ज्या बिंदूंना फलाचे मूल्य लघुत्तम किंवा महत्तम प्राप्त होते अशा बिंदूंना स्थायी बिंदू असे म्हणतात. लघुत्तम मूल्य आणि महत्तम मूल्यला फलाचे अंतिम मूल्य किंवा सीमा मूल्य असे म्हणतात.

सोडवलेली उदाहरणे

1. $y = x^3 - 9x^2 + 24x$ ह्या फलाचे लघुत्तम मूल्य आणि महत्तम मूल्य काढा.

उत्तर:- दिलेले $y = x^3 - 9x^2 + 24x$ ...... (i)

x च्या संदर्भात विकलन करू या

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 18x + 24$

आणि

$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 18$

y च्या लघुत्तम मूल्य आणि महत्तम मूल्य साठी, $\frac{dy}{dx} = 0$

$3x^2 - 18x + 24 = 0$

$3(x^2 - 6x + 8) = 0$

$x^2 - 6x + 8 = 0$

$(x-2)(x-4) = 0$

$(x-2) = 0\,;(x-4) = 0$

$x = 2\,,4$ हे स्थायी बिंदू आहेत.

आता

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{\mathrm{x=2}} = 6(2) - 18 = -6 < 0$

x = 2 ला महत्तम आहे

$y_{\max} = (2)^3 - 9(2)^2 + 24(2)$ समीकरण (i) वरून

$y_{\max} = 8 - 36 + 48$

$y_{\max} = 20$

तसेच

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=4} = 6(4) - 18 = 6 > 0$

x = 4 ला लघुत्तम आहे

$y_{\min} = (4)^3 - 9(4)^2 + 24(4)$ समीकरण (i) वरून

$y_{\min} = 64 - 144 + 96$

$y_{\min} = 16$

2. 80 ला दोन भागात विभाजित करा जेणेकरुन त्यांचा गुणाकार महत्तम येईल.

उत्तरः समजा, x हा 80 चा एक भाग आहे ∴ तर दुसरा भाग (80 - x) येईल.

समजा P हा त्या दोन भागांचा गुणाकार आहे

$\therefore P = x(80 - x)$

$= 80x - x^2$

$\therefore \frac{dP}{dx} = 80 - 2x$

$\therefore \frac{d^2P}{dx^2} = -2 < 0$

∴ P महत्तम आहे

महत्तम P साठी, $\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{dx}} = 0$

$80 - 2x = 0$

$2x = 80$

$\therefore x = 40$ साठी P महत्तम आहे.

∴ 80 चे दोन भाग आहेत 40, 40.

सरावासाठी प्रश्न

1. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$ ह्या फलाचे लघुत्तम मूल्य आणि महत्तम मूल्य काढा.

2. $y = x^3 - 18x^2 + 96x$ ह्या फलाचे लघुत्तम मूल्य आणि महत्तम मूल्य काढा.

3. 100 ला दोन भागात विभाजित करा जेणेकरून त्यांचा गुणाकार महत्तम येईल.

4. चिखलाच्या काठावर गोळी झाडली असता t सेकंदात गोळीने $(120t - 3600t^2)$ m/s आत प्रवेश करण्याच्या महत्तम खोलीची गणना करा.

5. 40 सेंटीमीटर लांबीची धातूची वायर वाकवून तिच्या पासून आयत तयार केला. त्याचे क्षेत्रफळ महत्तम असेल तर त्याचे परिमाण (लांबी आणि रुंदी) काढा.

6. उत्पादक ' x ' वस्तू प्रत्येकी (330 – x) रुपयास विकतो. जर ' x ' वस्तूंच्या उत्पादनाची किंमत $x^2 + 10x + 12$ इतकी आहे तर विक्री केलेल्या वस्तूंची संख्या निश्चित करा जेणेकरून उत्पादक महत्तम नफा मिळवू शकेल.

7. एका परिपथातून $I = \frac{V}{R+r}$ एवढी विद्युत धारा वहन होते, परिपथाचे विभवांतर V आहे आणि त्याचा अंतर्गत रोध r आहे. परिपथात वापरली जाणारी ऊर्जा I^2R ने दर्शवतात. तर सिद्ध करा की $R = r$ असतांना ऊर्जेचा वापर हा महत्तम असतो.

C) वक्रता त्रिज्या (Radius of curvature)

एका विशिष्ट बिंदूला वक्राच्या वक्रतेची त्रिज्या हि अंदाजीत वर्तुळाची त्रिज्या म्हणून परिभाषित केली जाते. वक्र बाजूने जाताना ही त्रिज्या बदलते वक्रता ही वक्रत्रिज्येच्या व्यस्त प्रमाणात असते.

बिंदू P (x_1, y_1) साठी y = f (x) ह्या वक्राची वक्रता त्रिज्या 'ρ' ने दर्शविली जाते आणि त्याचे

सूत्र $\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$

टीप:- वक्रतेची त्रिज्या नेहमी सकारात्मक असते म्हणजेच , $\rho > 0$

सोडवलेली उदाहरणे

1. बिंदू (2, 8) साठी $y = x^3$ ह्या वक्राची वक्रता त्रिज्या काढा.

उत्तर:- दिलेले $y = x^3$ आणि बिंदू (2, 8)

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

आणि $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$

आता $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2.8\,)} = 3(2)^2 = 12$

आणि $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{(2.8\,)} = 6(2) = 12$

सूत्र :- वक्रता त्रिज्या $= \rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$

$$\rho = \frac{[1+(12)^2]^{\frac{3}{2}}}{12}$$

$$\rho = \frac{[145]^{\frac{3}{2}}}{12}$$

$\rho = 145.50$ एकक

सरावासाठी प्रश्न

1. बिंदू (a, 2a) साठी $y^2 = 4ax$ ह्या वक्राची वक्रता त्रिज्या काढा.
2. एक शलाका (तुळई) y = 2 sin x – sin 2x ह्या वक्र स्वरूपात वाकवली तर x= $\frac{\pi}{2}$ ला वक्रता त्रिज्या काढा
3. एक दूर लेखी वायर $y = a\log\left\{sec\left(\frac{x}{a}\right)\right\}$ या वक्र स्वरूपात लटकत आहे कोणत्याही बिंदु साठी $\frac{1}{a}\cos(\frac{x}{a})$ वक्रता दाखवा.
4. बिंदू (0, 1) साठी $y = e^x$ ह्या वक्राची वक्रता त्रिज्या काढा.

- **४. १० भारतीय ज्ञान प्रणाली नुसार गणन पद्धती :-**

गणन पद्धती व भारतीय खगोलशास्त्रज्ञ (भारतीय गणित) (Calculus in Indian Knowledge System : The Discovery of Calculus by Indian Astronomers. (Indian Mathematics).

गणन (calculus) ही एक महत्त्वपूर्ण शाखा असून या शाखेत स्थिर आणि परिवर्तनशील तत्त्वांचे अध्ययन केले जाते. भारतीय गणितशास्त्रात गणन शाखेचा शोध महत्त्वाचा मानला जातो ज्यामुळे, ज्याचे परंपरागत अध्ययन आणि प्रयोग देशाच्या गणित विकासात महत्त्वाचे रहिले आहेत. आर्यभट्ट, ब्रह्मगुप्त, आणि भास्कर या प्राचीन गणितशास्त्रज्ञांनी गणनच्या तत्त्वांचे अध्ययन केले आणि त्यांच्या कृतींमध्ये ते समाविष्ट केले आहे. आर्यभट्टाच्या "आर्यभट्टीयम्" म्हणजे "आर्यभट्टीय गणित" या प्रस्तावनेत, गणनच्या तत्त्वांची माहिती समाविष्ट केली आहे. त्यांनी त्रिकोणमिती, गणितीय तत्त्वे, आणि खगोलशास्त्रातील अनेक विषय अभ्यस्त केली. ब्रह्मगुप्ताच्या "ब्रह्मस्फुतसिद्धान्त" म्हणजे "ब्रह्मस्फुत सिद्धांत" ह्या कृतीत, वर्गमूल, पूर्णांक, लाभ आणि ह्रास, आदिक हे गणितीय तत्त्व आहेत ज्यात गणनचे सिद्धांत आहेत. भास्कराच्या "लीलावती" ह्या कृतीमध्ये त्रिकोणमिती, द्विगुण, वर्गमूल, पूर्णांक, ग्रहणगणित, आणि समीकरणांचे प्रयोग आहेत. आणि ते प्राचीन भारतीय गणितशास्त्राच्या अत्यंत महत्त्वाच्या अंग आहेत.खगोलशास्त्र, अभियांत्रिकी, आणि अन्य विज्ञानांच्या क्षेत्रांमध्ये भारतीय गणितशास्त्रज्ञांचे गणनचे सिद्धांत प्रचलित झाले आहेत आणि ते आजही अध्ययनात व अध्यापनात उपयुक्त आहेत. भारतीय गणितशास्त्रात गणनेचे महत्त्व खूप उच्च आहे, ज्यामुळे अनेक आधुनिक गणितीय सिद्धांत निर्माण केले जातात. आर्यभट्ट, ब्रह्मगुप्त, आणि भास्कर या प्राचीन गणितशास्त्रज्ञांचे संशोधन आणि त्यांच्या कृतींमध्ये गणनेचे सिद्धांत यांचा अभ्यास केला आहे. त्यांच्या संशोधनांचे आधार आजही अनेक संदर्भात वापरले जातात.

घटक : ५ (Unit - 5)

सांख्यिकी / संख्याशास्त्र (Statistics) स्टॅटिस्टिक्स

- **विषय निष्पत्ती (Course outcome):-** अभियांत्रिकी संबंधित समस्या सोडवण्यासाठी आकडेवारीच्या मूलभूत संकल्पनांचा वापर करणे.
- **अध्ययन निष्पत्ती :-**

५.१ दिलेल्या अवर्गीकृत व वर्गीकृत सामग्रीची श्रेणी (Range) आणि श्रेणी गुणांक (Coefficient of Range) मिळविणे.

५.२ दिलेल्या साध्या अभियांत्रिकी समस्यांची संबंधित वेगळ्या आणि गटबद्ध सामग्रीचे मध्य (Mean) आणि प्रमाणित विचलनाची (Standard Deviation) गणना करणे

५.३ दिलेल्या अवर्गीकृत व वर्गीकृत सामग्रीच्या भिन्नता (variance) आणि भिन्नता गुणांक (co-efficient of variance) निश्चित करणे

५.४ दिलेल्या साध्या अभियांत्रिकी समस्यांची संबंधित वेगवेगळ्या आणि गटबद्ध सामग्रीची गुणवत्ता पूर्वक तुलना करणे.

- **परिचय (Introduction)**

सांख्यिकी किंवा संख्याशास्त्र ही एक गणितीय शाखा आहे. ज्याचा उपयोग अवर्गीकृत व वर्गीकृत सामग्रीचे विश्लेषण करण्यासाठी केला जातो. यात संख्यांचे गुणधर्म आणि सामग्रीची श्रेणी ओळखली जाते त्यामुळे सामग्रीच्या संग्रहातून विश्लेषणात , विवेचनात आणि नियोजनात ते उपयोगी ठरते

आकडेवारी संग्रह सादरीकरण विश्लेषण आणि निष्कर्ष मिळवणे यांचे शास्त्र म्हणजेच संख्याशास्त्र होय.

- **महत्व (Significance) :-**

सांख्यिकीय सामग्रीची तुलना केल्याने चांगले निर्णय घेता येतात.

A) **श्रेणी(Range):-**

- **कच्च्या सामग्रीची श्रेणी (Range for raw data):-** कच्च्या सामग्रीची श्रेणी दिलेली सामग्री मधील सर्वात लहान मूल्य आणि सर्वात मोठ्या मूल्यांमधील फरक म्हणून परिभाषित केली जाते.

L = सर्वात मोठे मूल्य

S = सर्वात लहान मूल्य

श्रेणी = L – S आणि गुणांक श्रेणी = $\frac{L-S}{L+S}$

सोडवलेले उदाहरण

1. खालील सामग्री साठी श्रेणी आणि श्रेणी गुणांक शोधा.
   200, 210, 208,160, 250, 290

उत्तर:- L = सर्वात मोठे मूल्य = 290

S = सर्वात लहान मूल्य = 160

श्रेणी = L – S = 290 – 160 = 130 आणि

गुणांक श्रेणी = $\frac{L-S}{L+S} = \frac{290-160}{290+160} = \frac{130}{450} = 0.28889$

सरावासाठी प्रश्न

2. खालील सामग्री साठी श्रेणी आणि श्रेणी गुणांक शोधा.

   i. 15,25,35,45,55,65
   ii. 40, 52, 47, 28, 45, 36, 47, 50
   iii. 15 , 22 , 27 , 11 , 9 , 21 , 14 , 9

- **अवर्गीकृत सामग्रीची श्रेणी (Range for ungrouped data):-** अवर्गीकृत सामग्रीची श्रेणी दिलेली सामग्रीमधील x_i चे सर्वात लहान मूल्य आणि x_i च्या सर्वात मोठ्या मूल्यातील फरक म्हणून परिभाषित केली आहे

  L = x_i चे सर्वात मोठे मूल्य , S = x_i चे सर्वात लहान मूल्य

  श्रेणी = L – S आणि गुणांक श्रेणी = $\frac{L-S}{L+S}$

सोडवलेले उदाहरण

1. खालील सामग्री साठी श्रेणी आणि श्रेणी गुणांक शोधा.

x_i	60	61	62	63	64	65	66	67
f_i	2	9	15	29	25	12	10	4

उत्तर:- L = x_i चे सर्वात मोठे मूल्य = 67

S = x_i चे सर्वात लहान मूल्य = 60

श्रेणी = L – S = 67 – 60 = 7 आणि

गुणांक श्रेणी = $\frac{L-S}{L+S} = \frac{67-60}{67+60} = \frac{7}{127} = 0.055118$

सरावासाठी प्रश्न

1. खालील सामग्री साठी श्रेणी आणि श्रेणी गुणांक शोधा.

i.

Age in years	13	14	15	16	17	18
No. of students	10	12	20	14	9	3

ii.

Heights in cm(x_i)	4	7	10	13	16	19	22	25	28
No.of students(f_i)	7	10	20	34	24	18	12	5	0

iii.

Marks obtained	5	15	25	35	45	55
No of students	10	20	30	40	50	60

- **वर्गीकृत सामग्रीची श्रेणी (Range for grouped data):-** दिलेल्या वर्गीकृत सामग्रीची शेवटच्या वर्गाची उच्च सीमा आणि प्रथम वर्गाची निम्न सीमा यांच्यातील फरक म्हणून परिभाषित केली आहे

  समजा, L = शेवटच्या वर्गाची उच्च सीमा , S = प्रथम वर्गाची निम्न सीमा

  श्रेणी = L – S आणि गुणांक श्रेणी = $\frac{L-S}{L+S}$

सोडवलेले उदाहरण

1. खालील सामग्री साठी श्रेणी आणि श्रेणी गुणांक शोधा.

Class Interval	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
Frequency	08	12	10	15	05

उत्तर:-

Class Interval	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
Frequency	08	12	10	15	05

L = शेवटच्या वर्गाची उच्च सीमा = 50

S = प्रथम वर्गाची निम्न सीमा = 0

श्रेणी =L – S= 50 – 0 = 50 आणि गुणांक श्रेणी = $\frac{L-S}{L+S} = \frac{50-0}{50+0} = \frac{50}{50} = 1$

2. खालील सामग्री साठी श्रेणी आणि श्रेणी गुणांक शोधा.

Age in Yrs	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79
Frequency	3	61	223	137	53	19	4

उत्तर:- दिलेल्या वर्गमर्यादा खंडित स्वरूपात आहे, म्हणून प्रथम त्यास आपण अखंडित वर्ग सीमेत बदलू

x_i	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79
C.B.	9.5-19.5	19.5-29.5	29.5-39.5	39.5-49.5	49.5-59.5	59.5-69.5	69.5-79.5
f_i	3	61	223	137	53	19	4

L = शेवटच्या वर्गाची उच्च सीमा = 79.5

S = प्रथम वर्गाची निम्न सीमा = 9.5

श्रेणी = L – S= 79.5 – 9.5 = 70 आणि

गुणांक श्रेणी = $\frac{L-S}{L+S} = \frac{79.5-9.5}{79.5+9.5} = \frac{70}{89} = 0.786511$

सरावासाठी प्रश्न

1. खालील सामग्री साठी श्रेणी आणि श्रेणी गुणांक शोधा.

i.

Weight (in gms)	10 – 15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
No of Items	7	12	16	25	19	15	6

ii.

Class	21 –25	26 –30	31 –35	36 –40	41 –45
Frequency	4	16	38	12	10

B) **मध्य विचलन (Mean Deviation - मिन डेव्हिएशन)[M.D.]:-**

- **कच्च्या सामग्री साठी मध्य विचलन (Mean Deviation for raw data):-**

मध्य भोवतालचे मध्ये विचलन = Mean Deviation about mean = MD

मध्य $= \bar{x} = \dfrac{\sum xi}{n}$ $\quad MD = \dfrac{|di|}{n}$

xi	$\lvert di \rvert = \lvert xi - \bar{x} \rvert$
x_1	d_1
:	:
x_n	d_n
	$\sum \lvert di \rvert$

सोडवलेले उदाहरण

1. खालील सामग्रीच्या मध्य भोवतालचे मध्य विचलनाची किंमत काढा.
   1, 2, 3 , 4, 5 ,6 , 7, 8 , 9.

उत्तर:-

मध्य $=\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9}{9}$

$\bar{x} = \frac{45}{9}$

$\bar{x} = 5$

xi	$\lvert di \rvert = \lvert xi - \bar{x} \rvert$
1	4
2	3
3	2
4	1
5	0
6	1
7	2
8	3
9	4
	$\sum \lvert di \rvert = 20$

$\mathrm{MD} = \frac{\sum |\mathrm{di}|}{n} = \frac{20}{9} = 2.22$

सरावासाठी प्रश्न

1. खालील सामग्रीच्या मध्य भोवतालचे मध्य विचलनाची किंमत काढा.
   i) 3, 6, 5 , 7, 10 , 12, 15, 18.
   ii) 15 , 22 , 27 , 11 , 9 , 21 , 14 , 9
   iii) 40, 52, 47, 28, 45, 36, 47, 50

- **अवर्गीकृत वारंवारता वितरणाचे मध्य विचलन (M.D. for Discrete (ungrouped) Frequency Distribution):-**

  मध्य भोवतालचे मध्य विचलन = Mean Deviation about mean = MD

  मध्य = Mean = $\bar{x} = \frac{\sum fixi}{\sum fi}$ $\quad MD = \frac{\sum fi|di|}{\sum fi}$

xi	fi	fixi	$\lvert d_i \rvert = \lvert x_i - \bar{x} \rvert$	fi|di|
x_1 : x_n	f_1 : f_n	f_1x_1 : f_nx_n	d_1 : d_n	f_1d_1 : f_nd_n
	Σfi	Σfixi		Σfi|di|

सोडवलेले उदाहरण

1. खालील सारणीतील मध्य भोवतालचे मध्य विचलनाची किंमत काढा.

x_i	3	4	5	6	7	8
f_i	4	9	10	8	6	3

उत्तर:-

:-

x_i	fi	fixi	$\lvert di \rvert = \lvert x_i - \bar{x} \rvert$	f_i |di|
3 4 5 6 7 8	4 9 10 8 6 3	12 36 50 48 42 24	2.3 1.3 0.3 0.7 1.7 2.7	9.2 11.7 3 5.6 10.2 8.1
	$\sum fi = 40$	$\sum fixi = 212$		$\sum fi\lvert di\rvert = 47.8$

मध्य = Mean = $\bar{x} = \frac{\sum fixi}{\sum fi}$ $MD = \frac{\sum fi|di|}{\sum fi}$

$\bar{x} = \frac{212}{40}$ MD = $\frac{47.8}{40}$

$\bar{x} = 5.3$ MD = 1.195

सरावासाठी प्रश्न

1. खालील सारणीतील मध्य भोवतालचे मध्य विचलनाची किंमत काढा.

i.

Age in years	13	14	15	16	17	18
No. of students	10	12	20	14	9	3

ii.

Height(in Inches)	60	61	62	63	64	65	66	67	68
No. of students	2	9	15	29	25	12	10	4	3

- **वर्गीकृत वारंवारता वितरणाचे मध्य विचलन (M.D. for grouped Frequency Distribution):-**

मध्य भोवतालचे मध्य विचलन = Mean Deviation about mean = MD

मध्य = Mean = $\bar{x} = \frac{\sum fixi}{\sum fi}$ $MD = \frac{\sum fi|di|}{\sum fi}$

Class mark xi	fi	fixi	$\lvert d_i \rvert = \lvert x_i - \bar{x} \rvert$	fi|di|
x_1 : x_n	f_1 : f_n	f_1x_1 : f_nx_n	d_1 : d_n	f_1d_1 : f_nd_n
	Σfi	Σfixi		Σfi|di|

सोडवलेले उदाहरण

1. खालील सारणीतील मध्य भोवतालचे मध्य विचलनाची किंमत काढा.

Weight of wood logs (in kgs.)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
No. of logs	4	6	10	18	9	3

उत्तर:-

C.I.	x_i	fi	fixi	$\lvert di\rvert = \lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i \lvert di\rvert$
10-20	15	4	60	26.2	104.8
20-30	25	6	150	16.2	97.2
30-40	35	10	350	6.2	62
40-50	45	18	810	3.8	68.4
50-60	55	9	495	13.8	124.2
60-70	65	3	195	23.8	71.4
		$\sum fi = 50$	$\sum fixi = 2060$		$\sum fi\lvert di\rvert = 528$

मध्य = Mean = $\bar{x} = \frac{\sum fixi}{\sum fi}$ $MD = \frac{\sum fi|di|}{\sum fi}$

$\bar{x} = \frac{2060}{50}$ MD = $\frac{528}{50}$

$\bar{x} = 41.2$ MD = 10.56

2. खालील सारणीतील मध्य भोवतालचे मध्य विचलनाची किंमत काढा.

Class	40-59	60-79	80-99	100-119	120-139
fi	50	300	500	200	60

उत्तर:-

Class	Continue class	x_i	fi	fixi	$\lvert di\rvert = \lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i \lvert di\rvert$
40-59	39.5-59.5	49.5	50	2475	38.559	1927.95
60-79	59.5-79.5	69.5	300	20850	18.559	5567.7
80-99	79.5-99.5	89.5	500	44750	1.441	720.5
100-119	99.5-119.5	109.5	200	21900	21.441	4288.2
120-139	119.5-139.5	129.5	60	7770	41.441	2486.86
			1110	97745		14991.21

मध्य = Mean = $\bar{x} = \frac{\sum fixi}{\sum fi}$ $MD = \frac{\sum fi|di|}{\sum fi}$

$\bar{x} = \frac{97745}{1110}$ MD = $\frac{14991.21}{1110}$

$\bar{x} = 88.059$ MD = 13.505

सरावासाठी प्रश्न

1. खालील सारणीतील मध्य भोवतालचे मध्य विचलनाची किंमत काढा.

i.

Weight (in gms)	10 – 15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
No of Items	7	12	16	25	19	15	6

ii.

Class	21 –25	26 –30	31 –35	36 –40	41 –45
Frequency	4	16	38	12	10

iii.

Class Interval	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
Frequency	8	12	10	15	5

iv.

Age in Yrs	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79
Frequency	3	61	223	137	53	19	4

C) **प्रमाणित विचलन (Standard Deviation - स्टँडर्ड डेव्हिएशन)[S.D.]:-**

- **कच्च्या सामग्रीचे प्रमाणित विचलन (Standard Deviation for raw data):-**

प्रमाणित विचलन $SD. = \sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}$

$$\text{S.D.} = \sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

x_i	x_i^2
x_1 x_2 : x_n	x_1^2 x_2^2 : x_n^2
Σx_i	Σx_i^2

सोडवलेले उदाहरण

1. खालील सामग्रीच्या प्रमाणित विचलनाची किंमत काढा.
   6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

उत्तर:- दिलेली सामग्री ही कच्च्या स्वरूपात आहे

x_i	x_i^2
6	36
7	49
10	100
12	144
13	169
4	16
8	64
$\Sigma x_i =$ **60**	$\Sigma x_i^2 =$ **578**

निरीक्षणाची एकूण संख्या = n = 7

प्रमाणित विचलन = $SD. = \sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}$

$$SD = \sqrt{\frac{578}{7} - \left(\frac{60}{7}\right)^2}$$

$$SD = \sqrt{82.57 - (8.57)^2}$$

$$SD = \sqrt{82.57 - 73.44}$$

$$SD = \sqrt{9.13}$$

$$SD = 3.02$$

सरावासाठी प्रश्न

1. खालील सामग्रीच्या प्रमाणित विचलनाची किंमत काढा.

   i. 19,23,16,07,18,35,14,24
   ii. 15,22,27,11,09,21,14,09
   iii. 3,7,10,18,22

- **अवर्गीकृत सामग्रीचे प्रमाणित विचलन(Standard Deviation for ungrouped data):-**

प्रमाणित विचलन $= S.D. = \sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \left(\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - (\bar{x})^2}$

x_i	f_i	$f_i x_i$	x_i^2	$f_i x_i^2$
x_1	f_1	$f_1 x_1$	x_1^2	$f_1 x_1^2$
x_2	f_2	$f_2 x_2$	x_2^2	$f_2 x_2^2$
:	:	:	:	:
x_n	f_n	$f_n x_n$	x_n^2	$f_n x_n^2$
	Σf_i	$\Sigma f_i x_i$		$\Sigma f_i x_i^2$

सोडवलेले उदाहरण

1. खाली दिलेल्या सारणीचे प्रमाण विचलनाची किंमत काढा.

x_i	27	28	29
f_i	2	7	1

उत्तर:-

x_i	f_i	$f_i x_i$	x_i^2	$f_i x_i^2$
27	2	54	729	1458
28	7	196	784	5488
29	1	29	841	841
	$\Sigma f_i = 10$	$\Sigma f_i x_i = 279$		$\Sigma f_i x_i^2 = 7787$

प्रमाणित विचलन $= S.D. = \sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \left(\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}\right)^2}$

प्रमाणित विचलन $= S.D. = \sigma = \sqrt{\frac{7787}{10} - \left(\frac{279}{10}\right)^2}$

प्रमाणित विचलन $= S.D. = \sigma = \sqrt{778.7 - 778.41}$

प्रमाणित विचलन $= S.D. = \sigma = \sqrt{0.29}$

प्रमाणित विचलन $= S.D. = \sigma = 0.538$

सरावासाठी प्रश्न

1. खालील सामग्रीच्या प्रमाणित विचलनाची किंमत काढा.

i.

Heights in cm	4	7	10	13	16	19	22	25	28
No. of students	7	10	20	34	24	18	12	5	0

ii.

x_i	5	10	15	20	25
f_i	6	16	28	38	46

- **वर्गीकृत सामग्रीचे प्रमाणित विचलन(Standard Deviation for grouped data):-**

प्रमाणित विचलन $= \mathrm{S.D.} = \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \left(\frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}\right)^2}$

सोडवलेले उदाहरण

1. खाली दिलेल्या सारणीचे प्रमाण विचलनाची किंमत काढा.

Marks obtained	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
No of students	10	16	18	30	15	6	5

उत्तर:-

C.I	x_i	f_i	$f_i x_i$	x_i^2	$f_i x_i^2$
0-10	5	10	50	25	250
10-20	15	16	240	225	3600
20-30	25	18	450	625	11250
30-40	35	30	1050	1225	36750
40-50	45	15	675	2025	30375
50-60	55	6	330	3025	18150
60-70	65	5	325	4225	21125
		$\Sigma f_i = 100$	$\Sigma f_i x_i = 3120$		$\Sigma f_i x_i^2 = 121500$

$$\text{प्रमाणित विचलन} = \text{S.D.} = \sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \left(\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}\right)^2}$$

$$\text{प्रमाणित विचलन} = \text{S.D.} = \sigma = \sqrt{\frac{121500}{100} - \left(\frac{3120}{100}\right)^2}$$

$$\text{प्रमाणित विचलन} = \text{S.D.} = \sigma = \sqrt{1215 - 973.44}$$

$$\text{प्रमाणित विचलन} = \text{S.D.} = \sigma = \sqrt{241.6}$$

$$\text{प्रमाणित विचलन} = \text{S.D.} = \sigma = 15.54$$

सरावासाठी प्रश्न

1. खालील सामग्रीच्या प्रमाणित विचलनाची किंमत काढा.

i.

Class Intervals	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
Frequencies	3	5	8	3	1

ii.

Marks obtained	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
No of students	14	23	27	21	15

iii.

Age in Yrs	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79
Frequency	3	61	23	37	53	19	4

D) **भिन्नता (Variance):-** प्रमाण विचलनच्या वर्गास भिन्नता म्हणतात

- **कच्च्या सामग्रीची भिन्नता:-**

मध्य = $mean = \bar{x} = \frac{\Sigma\, x\, i}{n}$

भिन्नता = Variance = (प्रमाण विचलन $)^2$ = (S.D.$)^2$ = (σ $)^2$

भिन्नता गुणांक = Coefficient of Variance = $\frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

सोडवलेले उदाहरण

1. खाली दिलेल्या सामग्रीची भिन्नता आणि भिन्नता गुणांक यांची किंमत काढा.
   49, 63, 46, 59, 65, 52, 60, 54.
   उत्तर:- दिलेली सामग्री ही कच्च्या स्वरूपात आहे

x_i	x_i^2
49	2401
63	3969
46	2116
59	3481
65	4225
52	2704
60	3600
54	2916
Σx_i =**448**	Σx_i^2 = **25412**

निरीक्षणाची एकूण संख्या= n = 8

मध्य $= mean = \bar{x} = \frac{\Sigma x i}{n} = \frac{448}{8} = 56$

प्रमाणित विचलन = $SD. = \sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}$

$$SD = \sqrt{\frac{25412}{8} - \left(\frac{448}{8}\right)^2}$$
$$SD = \sqrt{3176.5 - (56)^2}$$
$$SD = \sqrt{3176.5 - 3136}$$
$$SD = \sqrt{40.5}$$
$$SD = 6.363$$

भिन्नता = Variance = (प्रमाण विचलन $)^2$ = $(S.D.)^2 = (\sigma)^2 = \left(\sqrt{40.5}\right)^2 = 40.5$

भिन्नता गुणांक = Coefficient of Variance = $\frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{6.363}{56} \times 100 = 11.362$ %

सरावासाठी प्रश्न

1. खाली दिलेल्या सामग्रीची भिन्नता आणि भिन्नता गुणांक यांची किंमत काढा.
   i. 1, 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7.
   ii. 25, 50, 30 , 70 , 42 , 36, 48 , 34 , 60.
   iii. जर सामग्रीचा भिन्नता गुणांक 5 आणि मध्य 60 आहे तर प्रमाण विचलनची किंमत काढा.

- **अवर्गीकृत सामग्रीची भिन्नता(Variance for ungrouped data):-**

सोडवलेले उदाहरण

1. खाली दिलेल्या सामग्रीची भिन्नता काढा.

x_i	10	20	30	40	50
f_i	12	15	17	11	9

उत्तर:-

x_i	f_i	$f_i x_i$	x_i^2	$f_i x_i^2$
10	12	120	100	1200
20	15	300	400	6000
30	17	510	900	15300
40	11	440	1600	17600
50	9	450	2500	22500
	$\Sigma f_i = 64$	$\Sigma f_i x_i = 1820$		$\Sigma f_i x_i^2 = 62600$

$$\text{प्रमाणित विचलन} = \text{S.D.} = \sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \left(\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}\right)^2}$$

$$\text{प्रमाणित विचलन} = \text{S.D.} = \sigma = \sqrt{\frac{62600}{64} - \left(\frac{1820}{64}\right)^2}$$

$$\text{प्रमाणित विचलन} = \text{S.D.} = \sigma = \sqrt{978.125 - 808.691}$$

$$\text{प्रमाणित विचलन} = \text{S.D.} = \sigma = \sqrt{169.435}$$

$$\text{प्रमाणित विचलन} = \text{S.D.} = \sigma = 13.016$$

भिन्नता = Variance = (प्रमाण विचलन $)^2$ = $(\text{S.D.})^2$ = $(\sigma)^2$ = $(\sqrt{169.435})^2$=169.435

सरावासाठी प्रश्न

1. खाली दिलेल्या सामग्रीची भिन्नता काढा.

Marks	5	15	25	35	45	55
No. of students	10	20	30	50	40	30

- **वर्गीकृत सामग्रीची भिन्नता(Variance for grouped data):-**

सोडवलेले उदाहरण

1. खाली दिलेल्या सामग्रीची भिन्नता आणि भिन्नता गुणांक यांची किंमत काढा.

Marks obtained	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
No of students	10	16	18	30	15	6	5

उत्तर:-

C.I	x_i	f_i	f_ix_i	x_i^2	$f_ix_i^2$
0-10	5	10	50	25	250
10-20	15	16	240	225	3600
20-30	25	18	450	625	11250
30-40	35	30	1050	1225	36750
40-50	45	15	675	2025	30375
50-60	55	6	330	3025	18150
60-70	65	5	325	4225	21125
		$\Sigma f_i = 100$	$\Sigma f_ix_i = 3120$		$\Sigma f_ix_i^2 = 121500$

मध्य $= mean = \bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{3120}{100} = 31.20$

प्रमाणित विचलन $= \text{S.D.} = \sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \left(\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}\right)^2}$

प्रमाणित विचलन $= \text{S.D.} = \sigma = \sqrt{\frac{121500}{100} - \left(\frac{3120}{100}\right)^2}$

प्रमाणित विचलन $= \text{S.D.} = \sigma = \sqrt{1215 - 973.44}$

प्रमाणित विचलन $= \text{S.D.} = \sigma = \sqrt{241.6}$

प्रमाणित विचलन $= \text{S.D.} = \sigma = 15.54$

भिन्नता = Variance = (प्रमाण विचलन $)^2$ = $(\text{S.D.})^2 = (\sigma)^2 = (\sqrt{241.6})^2 = 241.6$

भिन्नता गुणांक = Coefficient of Variance = $\frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{15.54}{31.20} \times 100 = 49.80$ %

सरावासाठी प्रश्न

1. खाली दिलेल्या सामग्रीची भिन्नता आणि भिन्नता गुणांक यांची किंमत काढा.

Marks obtained	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
No of students	14	23	27	21	15

2. जर सामग्रीचा मध्य 82.5 आणि प्रमाण विचलनची किंमत 7.2 तर भिन्नताची किंमत काढा.

3. भिन्नता गुणांक 5 आणि मध्य 60 आहे तर प्रमाण विचलन काय असणार ?

- **निरीक्षणाच्या दोन संख्यांची तुलना(Comparison of Two Sets of Observations):-** भिन्नता गुणांक प्रसरण परिमाणाचे (measure of dispersion) सर्वात महत्त्वाचे सापेक्ष उपाय आहे ज्या संचाचा भिन्नता गुणांक कमी तो संच अधिक सुसंगत (more consistent) असणार आणि ज्या संचाचा भिन्नता गुणांक जास्त तो संच कमी सुसंगत (less consistent) असणार म्हणजेच त्या संचात अधिक भिन्नता (more variability)असणार.

सोडवलेले उदाहरण

1. निरीक्षणाचे दोन संच खाली दिले आहेत दोघा संचापैकी कोणता संच अधिक सुसंगत असेल?

Set-I	Set-II
x = 82.5	x = 48.75
σ = 7.3	σ = 8.35

उत्तर:-

Set-I चा भिन्नता गुणांक = Coefficient of Variance = $\frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{7.3}{82.5} \times 100 = 8.848$ %

Set-II चा भिन्नता गुणांक = Coefficient of Variance = $\frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{8.35}{48.75} \times 100 = 17.12$ %

Set-I चा भिन्नता गुणांक कमी आहे

Set-I हा संच अधिक सुसंगत (more consistent)आहे

सरावासाठी प्रश्न

1. एकाच उद्योगात गुंतलेल्या A आणि B या दोन कारखान्यांमध्ये सरासरी साप्ताहिक वेतन आणि प्रमाणित विचलन खालील प्रमाणे आहे कोणता कारखाना अधिक सुसंगत आहे?

Factories	Average wages	Standard deviation
A	34.5	5.0
B	28.5	4.5

2. पाच एक दिवसीय सामन्यांमध्ये दोन फलंदाज Aआणि B यांनी केलेल्या धावांची माहिती खालीलप्रमाणे

Batsman	Average run scored	Standard deviation
A	44	5.1
B	54	6.31

कोणता फलंदाज अधिक सुसंगत आहे ते सांगा

3. 10 डावांच्या मालिकेत A आणि B या दोन फलंदाजांनी मिळवलेल्या धावांचे सरासरी अनुक्रमे 50 आणि 12 आहेत त्यांच्या धावांचे प्रमाण विचलन अनुक्रमे 15 आणि 2 आहे. कोणता फलंदाज सर्वात सुसंगत आहे ?

SUGGESTED LEARNING MATERIALS/BOOKS
सुचविलेले शिक्षण साहित्य/पुस्तके

Sr. No	Author	Title	Publisher with ISBN Number
1	Grewal B. S.	Higher Engineering Mathematics	Khanna publication New Delhi , 2013ISBN: 8174091955
2	Dutta. D	A text book of Engineering Mathematics	New age publication New Delhi, 2006ISBN: 978-81-224-1689-3
3	Kreysizg, Ervin	Advance Engineering Mathematics	Wiley publication New Delhi 2016 ISBN:978-81-265-5423-2
4	Das H.K.	Advance Engineering Mathematics	S Chand publication New Delhi 2008ISBN: 9788121903455
5	Marvin L. Bittinger David J.Ellenbogen Scott A. Surgent	Calculus and Its Applications	Addison-Wesley 10th Edition ISBN-13:978-0-321-69433-1
6	C. S. Seshadri	Studies in the History of IndianMathematics	Hindustan Book Agency, New Delhi110016. ISBN 978-93-80250-06-9
7	George Gheverghese Joseph	Indian Mathematics Engaging with the World from Ancient toModern Times	World Scientific Publishing Europe Ltd. 57ISBN 978-17-86340-61-0
8	Deepak Singh	Mathematics-I	Khanna Book Publishing Co. (P) Ltd. ISBN: 978-93-91505-42-4
9	Garima Singh	Mathematics-II	Khanna Book Publishing Co. (P) Ltd. ISBN: 978-93-91505-52-3
10	Gareth James, Daniela Witten, Trevor Hastie Robert and Tibshirani	An Introduction to Statistical Learning with Applications in R	Springer New York Heidelberg Dordrecht London ISBN 978-1-4614-7137-0 ISBN 978-1-4614-7138-7 (eBook)
11	Gunakar Muley	Sansar Ke Mahan Ganitagya	First Edition, Rajkamal Prakashan, ISBN- 10. 8126703571, ISBN-13. 978-8126703579.
12	T.S. Bhanumurthy	A Modern introduction to Ancient Indian Mathematics	New Age International Private Limited, 1 January 2008 ISBN- 10. 812242600X, ISBN- 13. 978-8122426007
13	M.P. Trivedi and P.Y. Trivedi	Consider Dimension and Replace Pi	Notion Press; 1st edition (2018), ISBN- 978-1644291795

(LEARNING WEBSITES & PORTALS)

लर्निंग वेबसाईट्स आणि पोर्टल्स

Sr. No	Link / Portal	Description
1	http://nptel.ac.in/courses/106102064/1	Online Learning Initiatives by IITs andIISc
2	www.scilab.org/ -SCI Lab	Signal processing, statistical analysis,image enhancement.
3	www.mathworks.com/product/matlab/ -MATLAB	Applications of concepts of Mathematicsto coding.
4	Spreadsheet Applications	Use of Microsoft Excel, Apple Numbers,Google Sheets.
5	https://ocw.mit.edu/	MIT Course ware
6	https://www.khanacademy.org/math?gclid=CNqHuabCys4CFdOJaddHoPig	Concept of Mathematics through videolectures and notes
7	http://ocw.abu.edu.ng/courses/mathematics/	List of Mathematical Courses.
8	https://libguides.furman.edu/oer/subject/mathematics	Open Education Resources (OER) in Mathematics.
9	https://phet.colorado.edu/en/simulations/filter?subjects=math&type=html,prototype	Phet Simulation for Mathematics.
10	https://libguides.cmich.edu/OER/mathematics	Mathematics with OER.